BASICÃO DE EDO

Vinicius Cifú Lopes

Versão Preliminar

Capítulo 1

Qual é o assunto

Começamos por estabelecer o que são as Equações Diferenciais Ordinárias e por que devemos estudá-las. Apresentaremos também conceitos e definições úteis por todo o curso.

Não só neste capítulo, observaremos passagens que podem parecer estranhas ou errôneas, por exemplo, reescrever $\frac{dy}{dx} = y'$ como $dy = y'\,dx$. Há muitos outros "deslizes" que podem e devem ser notados. Recorremos ao bom senso e boa vontade do estudante (que aprenderá muito mais ao tentar justificar cada passagem) ou, onde se aplica, a esta observação em [FiNe]:

> *O rigor que a Análise ganhava no decorrer do século XIX começou a pôr em dúvida certos métodos... Os teoremas de existência e unicidade de solução surgem nessa fase. ... sua busca através de processos informais se torna justificável e promissora, uma vez que a "solução" assim obtida pode ser verificada a posteriori.*

É com esse espírito que algumas técnicas que estudaremos são relaxadas, porque a corretude de suas conclusões pode ser estabelecida depois. Isso *não* significa que deveremos abandonar o rigor matemático totalmente! Os "deslizes" deverão sempre ser justificáveis ou formalizáveis, ficando todo o raciocínio "sob controle".

Em resumo, usaremos nossos conhecimentos de Cálculo para *descobrir* coisas e, depois, prová-las.

A título de exemplo, visitaremos uma passagem da História da Matemática (veja [BoMe]) sem relação direta com EDOs:

Certos testes de convergência, aqueles usando integrais impróprias em

particular, mostram que a série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

converge a algum número real, mas esses testes *não dizem qual é esse limite.* Gente graúda como Leibniz e Jacques Bernoulli não soube determiná-lo.

Então Leonhard Euler encontrou um caminho: Queremos somar inversos de quadrados ou, afinal, somar inversos. Naquela época, eram muito populares as relações de Girard para polinômios de grau arbitrário e algumas de suas conseqüências; Euler pensou na soma dos inversos das raízes de um polinômio, que é igual ao oposto ("menos") do coeficiente do termo linear dividido pelo coeficiente do termo constante. (Cheque isso para ax^2+bx+c: aprendemos que as raízes x_1, x_2 satisfazem $x_1 + x_2 = -b/a$ e $x_1x_2 = c/a$; dividindo uma relação pela outra, vem $(x_1 + x_2)/x_1x_2 = (-b/a)/(c/a)$; simplificando, obtemos $(x_2)^{-1} + (x_1)^{-1} = -b/c$, como enunciado.)

No nosso caso, Euler precisava determinar um polinômio com raízes $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$, de modo que a soma de seus inversos (precisamente a série procurada) seria obtida pela relação de Girard. Claro, nenhum polinômio tem um número infinito de raízes, então deveremos operar com um "polinômio de grau infinito". Por outro lado, funções trigonométricas têm raízes que se distanciam regularmente; por exemplo, as raízes do seno são

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm n\pi, \ldots$$

Não queremos 0 em nossa lista de raízes, porque não sabemos tomar seu inverso; então podemos considerar a função $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$, cujas raízes são as mesmas excetuando-se 0.

Euler foi um grande manipulador de séries de potências e provavelmente lhe era mais natural lidar com a série em vez da própria função. Neste caso, podemos obtê-la dividindo-se a série de $\operatorname{sen}\theta$ pelo próprio θ:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \ldots$$

Eis um "polinômio de grau infinito", mas não exatamente aquele que procuramos. Mais interessante do que as raízes a intervalos de comprimento π seriam os seus quadrados

$$(\pm\pi)^2, (\pm 2\pi)^2, \ldots, (\pm n\pi)^2, \ldots,$$

mais parecidos com os números originais. Substituindo $\theta^2 = x$, temos

$$1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \ldots$$

cujas raízes são tais quadrados; esse é outro "polinômio de grau infinito". A soma dos inversos de suas raízes é, portanto,

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \ldots + \frac{1}{(n\pi)^2} + \ldots = -\Big(\frac{-1/3!}{1}\Big) = \frac{1}{6},$$

o que leva a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Nesse raciocínio, Euler aplicou regras de polinômios de grau finito a séries, sem qualquer justificativa. Contudo, havendo um "candidato" ($\pi^2/6$) a ser o limite da série, provar que a série converge a esse mesmo valor é uma tarefa mais simples.

1.1 O que são as equações diferenciais

O conceito de *equação diferencial* é melhor explicado por partes:

1: Uma *equação* envolve coeficientes e funções conhecidos e uma ou mais incógnitas cujos valores devemos determinar. Por exemplo, $2x + 3 = 5$ é uma equação, e $x = 1$ é sua única solução ou raiz no conjunto $\mathbb{R}$. Outros exemplos são $t^2 + 6 = 5t$ e $x^3 \operatorname{sen}(x^4) = 1$, enquanto podemos construir inúmeras equações fáceis ou difíceis de resolver, com muitas, poucas, uma única ou nenhuma solução.

2: *Diferencial* denota um conceito matemático muito próximo ao de derivada; portanto, espera-se que em uma equação diferencial constem derivadas. (As expressões dy e dx são exemplos de diferenciais; [Suv] introduz o Cálculo por meio delas.) Como derivada de constante é zero, as equações diferenciais só teriam valor prático se, de algum modo, *funções* fossem derivadas e, mais propriamente, essas funções não estivessem pré-fixadas. Assim, trabalharemos com incógnitas que são *funções.*

3: Em cursos introdutórios de Cálculo, já trabalhamos com problemas assim, quando procuramos responder à pergunta: "Qual é a função cuja derivada é $f(x)$?" Desenvolvem-se mesmo diversas *técnicas de primitivização* para solucionar esse problema.

Outra questão familiar é, em Física, determinar leis de movimento de corpos submetidos a configurações variadas de forças, e tais leis são funções, geralmente de uma variável real (tempo) a variáveis reais (coordenadas no espaço).

4: Por exemplo, $y' = 2y$ é uma equação diferencial. Uma solução possível é $y(x) = e^{2x}$: de fato, $y'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2y(x)$, ou seja, satisfizemos a equação ao substituir y por e^{2x}.

5: As equações diferenciais *ordinárias,* conhecidas por EDOs, são aquelas em que não ocorrem derivadas parciais, ou seja, buscam-se funções de apenas uma variável como raízes das equações. Muitas vezes, porém, operar com derivadas parciais é parte central da resolução de uma equação. Quanto ao co-domínio, há equações ordinárias (ou ainda, *sistemas* de EDOs) que se referem a funções vetoriais em vez de funções de valores reais.

Desse modo, as seguintes equações são diferenciais ordinárias: $yy' = 0$, $y' + y'' = 3x$, $\operatorname{sen} y' = x^2 + 2$, $y'' = \ln|y + x|$, onde se buscam soluções da forma $y(x)$, e o sistema $\dot{Y} = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{smallmatrix}\right] Y$, em que a incógnita tem a forma vetorial $Y(t) = \left[\begin{smallmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{smallmatrix}\right]$.

6 Notações para derivadas: Dada uma função suficientemente diferenciável f, escrevemos f', f'', f''' para indicar as funções que são sua primeira, segunda e terceira derivadas. Para uma derivada de ordem superior, digamos n, escrevemos $f^{(n)}$; quando a derivada é feita em relação à variável x, temos $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$. (Note que $f^{(0)}$ é a própria f.) Freqüentemente, quando a variável t é usada como *tempo,* usamos pontos em vez de linhas: $\dot{y}$, $\ddot{y}$; cuidado para enxergá-los! Enfim, é comum encontrarmos equações diferenciais na forma $a\,dx + b\,dy = 0$, que significa $a + by' = 0$ após a divisão por dx.

Alguns textos antigos usam y^{VIII} em vez de $y^{(8)}$. Há autores que adotam a convenção de indicar $\frac{\partial y}{\partial x}$ por y_x ou y'_x (sendo preciso tomar cuidado com o que se lê), especialmente quando são muitas as variáveis envolvidas.

Ainda com respeito a notação, explicamos que $\exp(x)$ e e^x são a mesma coisa, a função exponencial com base $e = 2{,}71828\ldots$ A notação "exp" é vantajosa quando o argumento envolve frações e integrais, o que acontecerá bastante em nosso estudo.

Determine se as funções indicadas são soluções das equações dadas:

7: $y' + y \operatorname{tg} x = 0$, $y = \cos x$.

Solução: A função dada é $y = \cos x$ e sua derivada é $y' = -\operatorname{sen} x$. Para tal y, portanto, temos

$$y' + y \operatorname{tg} x = -\operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{tg} x = 0,$$

ou seja, a função proposta satisfaz a equação dada, ou seja, é uma solução.

8: $(y')^2 = 5x^2 y$, $y = x^3$.

Solução: Dada $y = x^3$, temos $y' = 3x^2$. Substituindo-se, o lado esquerdo da equação fica $9x^4$ e o direito iguala $5x^5$. Esssa expressões não são iguais e concluímos que tal função *não* é solução da equação dada.

Detalhe: Poderíamos obter expressões diferentes em cada lado, mas ainda assim elas serem equivalentes e a função ser realmente solução da equação. Para certificar-se, mostre que $9x^4$ e $5x^5$ são iguais apenas para um número finito de valores de x e, portanto, não são equivalentes.

9: $y'' - y = 0$, $y = 5e^x$.

10: $y'' - y = 0$, $y = xe^x$.

11: $2xy' = 6y$, $y = 7x^3$.

12: $2xy' = 6y$, $y = -x^2$.

13: $(2x + y)\,dx + x\,dy = 0$, $y = -x$.

14: $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $x = A\cos(\omega t + \theta_0)$.

Trabalharemos preferencialmente com soluções $y(x)\colon I \to \mathbb{R}$, onde o domínio I é um intervalo aberto. Contudo, considerar equações e soluções complexas, ou de outras formas, é válido e importante campo de estudos.

Vamos formalizar as definições, a título de fixação?

15 Definição: Por uma *equação diferencial ordinária de ordem n,* entendemos uma relação na "forma geral"

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0,$$

que envolve uma função F de $n + 2$ variáveis definida em um conjunto D, uma variável independente x, uma função incógnita $y = y(x)$ e as primeiras n derivadas de y. (F pode estar "disfarçada" como uma simples adição ou não depender de algumas derivadas!) Muitas vezes usaremos t no lugar de x e, por sua vez, x no lugar de y.

16: Resolver essa equação significa encontrar um intervalo aberto I no eixo Ox e uma função $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ existam para cada $x \in I$, isto é, φ seja n vezes derivável em todo o seu domínio;

(ii) $\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) \in D$ para cada $x \in I$, de modo que possamos calcular F nessa $(n + 2)$-upla;

(iii) $F\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) = 0$ também para cada $x \in I$.

Uma tal função φ é chamada *solução da equação,* ou ainda "curva integral", e geralmente indicada apenas y.

17: Equações da forma apresentada são bastante difíceis de serem estudadas, como observaremos na Seção 1.4 ("funções implícitas"). Portanto, no que segue, estudaremos equações

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big),$$

ditas na *forma normal (de ordem n).* Em geral, suporemos que f é contínua em uma *região* U, isto é, um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^{n+1}$.

18: Assim, uma equação de *primeira ordem* na forma normal é

$$y' = f(x, y),$$

onde $f\colon U \to \mathbb{R}$ e U é uma região em $\mathbb{R}^2$.

A mais simples de todas é quando f depende somente de x:

$$y'(x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ em um certo intervalo.}$$

Suas soluções são as primitivas de f!

1.2 De onde elas vêm

Devemos nos perguntar qual é o significado ou a razão de ser do conceito de derivada que, afinal, constitui o material das equações diferenciais.

Para isso, reveremos dois exemplos tradicionais de problemas que podem ser expressos em termos de equações diferenciais. Para resolvê-los, não são necessárias técnicas sofisticadas e, por isso mesmo, eles figuram em textos de introdução ao Cálculo. (Veremos o método utilizado na Seção 2.1, detalhadamente.) Nos outros pontos, preocuparemo-nos apenas em determinar as equações que regem os fenômenos descritos.

19: Por definição,

$$y'(a) = \frac{dy}{dx}(a) = \lim_{x\to a} \frac{\Delta y_{(\text{em } a)}}{\Delta x_{(\text{em } a)}} = \lim_{h\to 0} \frac{y(a+h) - y(a)}{h}.$$

Isso é um *número,* enquanto y' ou $y'(x)$ é a *função* que associa a cada a o valor $y'(a)$.

Mostra-se que a função

$$L(x) = y(a) + y'(a)\cdot(x-a)$$

é a melhor aproximação linear à função $y(x)$ em torno do ponto a.

20 Aspecto geométrico: ([Suv]) Considere esta propriedade: Cada ponto de uma certa curva no plano Oxy é o ponto médio do segmento tangente à curva por esse mesmo ponto e limitado pelos eixos cartesianos.

Neste momento, pode ser difícil esquematizar essa propriedade em um gráfico. (Tente!) Experimentaremos conhecer essas curvas abstratamente:

Seja (x, y) um ponto de uma dessas curvas e suponha que a tangente à curva traçada por ele intersecte os eixos nos pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$. Da hipótese de (x, y) ser o ponto médio entre A e B, deduzimos que $A = (2x, 0)$ e $B = (0, 2y)$. Para que A e B estejam ambos bem determinados, sempre devemos ter $x, y \neq 0$.

O coeficiente angular da tangente AB é $\frac{0-2y}{2x-0}$ ou, simplesmente, $-y/x$. Lembramos, agora: "A derivada da função em um ponto é o coeficiente angular da tangente ao gráfico por aquele ponto." Em nosso caso, isso significa que $y' = -y/x$, ou seja,

$$xy' + y = 0;$$

essa é a equação diferencial ordinária que descreve as curvas com a propriedade enunciada.

21: Vamos já resolver essa equação, retornando-a à forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Separamos as variáveis e integramos:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| + C_1 = -\ln|x| + C_2.$$

Podemos chamar $C_2 - C_1$ de uma nova constante C:

$$\ln|xy| = C,$$

ou seja, $|xy| = e^C$ e então $xy = \pm e^C$. Novamente, $\pm e^C$ é um número real arbitrário, que chamamos de K, e a solução é

$$y = K/x.$$

Portanto, as curvas com a propriedade descrita são hipérboles equiláteras cujas assíntotas são os próprios eixos cartesianos. Agora, sabendo disso, esquematize a propriedade enunciada.

Atenção: Note que K pode ser negativa; isso é resultado das primitivas calculadas e ocorrerá com freqüência em nossos estudos.

22: Mostramos que as curvas com a propriedade enunciada são todas hipérboles de uma certa forma. Devemos mostrar que, reciprocamente, todas essas hipérboles têm aquela propriedade? Como fazê-lo?

Nos próximos exercícios (23–25), forme as equações diferenciais que descrevem as curvas planas em Oxy com as propriedades descritas. Basta obter as equações, não é preciso resolvê-las.

23: Em cada ponto, a distância ao longo da tangente até o eixo das abscissas é constante 1.

24: Em cada ponto, a distância ao longo da tangente até o eixo das abscissas é igual à distância do ponto à origem.

25: Em cada ponto, a reta tangente passa pela origem. (Em outras palavras: a melhor aproximação linear em cada ponto sempre "vale zero no zero".)

26 Aspecto mecânico: Descobriu-se, laboratorialmente, que a velocidade de desintegração radioativa é proporcional à quantidade (em uma medida adequada) da substância radioativa existente.

Suponhamos que nos instantes t e $t + \Delta t$ a quantidade de material radioativo era Q e $Q+\Delta Q$, respectivamente. O quociente $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ é a velocidade média de desintegração da substância, durante o intervalo de tempo Δt, e seu limite $\frac{dQ}{dt}$ é a velocidade instantânea de desintegração no instante t. Por hipótese, Q diminui quando t aumenta e, então, $\frac{dQ}{dt}$ é negativa; também por hipótese, essa derivada é proporcional a Q. Representando-se o coeficiente de proporcionalidade por $\alpha > 0$ — essa é a escolha de sinal comum em Física —, temos

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha Q$$

ou, simplesmente, $\dot{Q} + \alpha Q = 0$, que é a equação diferencial do decaimento.

Note bem que foi preciso considerar a velocidade *instantânea* de desintegração, dada pela derivada, e *não* a velocidade média entre o começo e o fim do processo.

27: A quantidade de uma substância específica enquanto se desintegra, em função do tempo, será solução da equação diferencial obtida. Essa "lei de desintegração" deverá ter como parâmetros a quantidade inicial Q_0 da amostra e a "meia-vida", ou seja, o período durante o qual se desintegra a metade da quantidade inicial do material.

Separamos e integramos, simplificando como com a equação anterior anterior:

$$\frac{dQ}{Q} = -\alpha\, dt \Rightarrow \ln Q = -\alpha t + C \Rightarrow Q = Ce^{C-\alpha t}.$$

Partindo do valor inicial Q_0 para $t = 0$, determinamos C por substituição:

$$Q_0 = e^{C-\alpha 0} \Rightarrow C = \ln Q_0 \Rightarrow Q = Q_0 e^{-\alpha t}.$$

Onde entra a meia-vida, nessa conta? Indicando a duração desse período por τ e substituindo na lei determinada, temos $Q_0/2 = Q_0 e^{-\alpha\tau}$, donde $\tau = (\ln 2)/\alpha$; isso requer o conhecimento de α. Em geral, quem é conhecido é o próprio τ, porque basta observar a amostra radioativa até que reste metade do material original. Então temos $\alpha = (\ln 2)/\tau$ e finalmente

$$Q = Q_0 e^{-t(\ln 2)/\tau}.$$

28: Um piscicultor deseja baixar a concentração de sal, inicialmente 36g/L, de um dique de criação de 5.000m^3. Ele abrirá uma comporta que escoa 100L/s do dique e, simultaneamente, abastecerá o dique com água doce (de concentração salina desprezível) a partir de uma fonte com a mesma vazão. Forme a equação diferencial que descreve a concentração x de sal no dique ao longo do tempo, assumindo homogeneização imediata da água.

Indicação: O volume de água no dique permanece constante! Durante um intervalo de tempo Δt, se supusermos a concentração x constante, perdem-se $100x\Delta t$ gramas de sal, de modo que $\Delta x \approx -100x\Delta t/5.10^6$ em gramas por litro.

Note: Essas variações são aproximadas porque x varia durante Δt: a água salobra e a água doce são trocadas simultaneamente, enquanto que a variação calculada corresponde a primeiro escoar toda a água salobra e então repor o volume com água doce. Tomando $\Delta t \to 0$, a aproximação torna-se correta, mas a equação fica diferencial.

29: Com a mesma técnica usada nos exemplos desta seção, resolva a equação obtida no exercício anterior e determine quanto tempo a operação tomará para a concentração baixar a um terço da original.

Nos próximos problemas (30–31), não é preciso resolver as equações diferenciais, apenas obtê-las:

30: Um ponto material move-se ao longo de uma reta sob ação exclusiva da atração gravitacional exercida por outro ponto material, fixado na origem. Determine a equação diferencial que rege seu movimento. Ela é válida para descrever o movimento na origem? Por quê?

Indicação: Sendo x a posição do ponto móvel, a segunda lei de Newton escreve-se $F = m\ddot{x}$ e a lei gravitacional diz $|F| = GMm/x^2$. Por que esse módulo é importante? Como podemos eliminá-lo?

31: Um poço fino é perfurado ao longo do diâmetro de um planeta esférico e sólido de raio R e densidade uniforme δ, sem rotação. Determine a equação diferencial que rege o movimento de uma sonda ao longo do eixo Ox do poço, com origem no centro do planeta. O que acontece se a sonda passar pelo centro do planeta ou pela superfície?

Lembrete: Se a sonda estiver no poço, sofre ação gravitacional da parte esférica do planeta mais próxima do centro, não da casca esférica exterior.

32: Como em outras áreas do Cálculo e da Matemática, alguns problemas sugeridos (sejam geométricos ou mecânicos) aparentemente são esdrúxulos e sem interesse. Isso é apenas aparência! Enunciados muito surreais podem ser oriundos de diversas situações de engenharia e projeto, mas estar apresentados em forma “fechada”. Nosso objetivo é formar, resolver ou estudar equações diferenciais, independentemente de motivação, embora freqüentemente o problema possa ser esclarecido por sua própria origem.

1.3 O que são PVIs e TEUs

Em algumas aplicações do estudo de Equações Diferenciais, não estamos preocupados em encontrar *todas* as soluções de uma dada equação, mas em determinar qual delas se ajusta aos nossos dados experimentais, como vimos nos problemas 27 e 29.

Consideremos esse assunto mais detalhadamente, começando por recordar este problema de Física colegial:

33: Determine a lei do *Movimento Retilínio Uniformemente Variado* de um ponto material com aceleração escalar γ constante, conhecendo-se sua posição e sua velocidade iniciais.

Solução: Utilizemos as funções $s(t), V(t)$ para designar a posição e a velocidade no tempo. Como a velocidade é a derivada da posição, $\dot{s} = V$, desejamos escrever $s = \int V(t)\,dt$.

Mas a integral indefinida é uma *família* de funções, enquanto s é uma única função. Um modo correto de expressar aquela idéia é através do ajuste da constante de integração, fixando-se uma primitiva qualquer. Porém, qual primitiva escolher? (Veja que $1/(x-1)$ e $x/(x-1)$ são diferentes, mas têm a mesma derivada.) Usamos, para isso, uma integral definida:

$$s(t) = \int_0^t V(u)\,du + A$$

para alguma constante $A \in \mathbb{R}$. A escolha do limite inferior da integral é arbitrária e feita para facilitar os cálculos seguintes; o limite superior é a

variável independente estudada; a variável de integração deve ser uma nova letra “muda”. Lembre que, de fato, essa integral definida é uma função de t com derivada V e deverá diferir de s, que tem a mesma derivada, apenas por uma constante (o valor A).

Do mesmo modo, a aceleração é a derivada da velocidade: $\dot{V} = \gamma$, de modo que

$$V(t) = \int_0^t \gamma\,du + B = \gamma t + B$$

com $B \in \mathbb{R}$. Então também

$$s(t) = \int_0^t (\gamma u + B)\,du + A = \gamma \frac{t^2}{2} + Bt + A.$$

Resta determinar A e B. Costuma-se, porém, fixar que $s(0) = s_0$ e $V(0) = V_0$, para facilitar a inclusão de valores experimentais ou a interpretação da fórmula. Das expressões acima para s e V, substituindo-se $t = 0$, obtemos $A = s_0$ e $B = V_0$ e podemos reescrever

$$s(t) = \gamma \frac{t^2}{2} + V_0 t + s_0.$$

34: Determine A e B quando $s(t_0) = s_0$ e $V(t_0) = V_0$ para um instante t_0 arbitrário.

O problema que pede $s(t)$ de modo que $\ddot{s} = \gamma$, $s(t_0) = s_0$, $\dot{s}(t_0) = V_0$ é um exemplo de PVI:

35: Em geral, para uma equação de ordem n, é preciso informar valores para as derivadas de ordens 0 a $n-1$ da solução, de modo a fixar uma função específica (em vez de uma família de funções) como solução da equação.

Quando esses n valores são informados no mesmo ponto, isto é, sob o mesmo valor da variável independente, então se trata de um *problema de valor inicial,* ou simplesmente “PVI”. Nos termos da definição em 15–16, o PVI é dado por um vetor $a_0 \in \mathbb{R}^n$ e um ponto inicial $x_0 \in I$; a solução φ deve satisfazer também $\left(\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0)\right) = a_0$.

(Quando se especifica, para uma equação de ordem n, os valores da solução em n pontos distintos, trata-se de um *problema de valores de contorno,* ou de *fronteira.* Isso é usual para equações de segunda ordem com valores especificados nas duas extremidades de um intervalo de definição.)

36: ([Gui]) Determine as funções s, c tais que $\left[\begin{smallmatrix} s(x) \\ c(x) \end{smallmatrix}\right]$ seja solução do PVI

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Y \text{ e } Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Multiplicando as matrizes do sistema, obtemos as equações $s'(x) = c(x)$ e $c'(x) = -s(x)$, assim como as condições iniciais $s(0) = 0$ e $c(0) = 1$. Em algumas situações, fazer isso explicitamente pode não ajudar em nada, mas aqui não temos outras opções.

Para começar, observamos que

$$(s^2 + c^2)' = 2ss' + 2cc' = 2sc + 2c(-s) \equiv 0,$$

de modo que $s^2 + c^2$ é constante. Para determinar o valor dessa constante, calculamos a nova função onde temos informação: $s(0)^2 + c(0)^2 = 1$, de modo que $s^2 + c^2 \equiv 1$. De onde veio essa função $s^2 + c^2$, ou melhor, como determinar uma função semelhante para um novo problema em mãos, somente muita prática e inúmeras tentativas frustradas poderão explicar.

Agora, tentemos determinar essas funções desconhecidas comparando-as com outras que tenham as mesmas propriedades. Aqui, pensa-se em seno e cosseno por causa de $s^2+c^2 = 1$ e as derivadas de s, c serem o que são! Mas como mostraremos que *devem* necessariamente ser seno e cosseno? Tome

$$h(x) = (s(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (c(x) - \cos x)^2;$$

obtemos

$$h'(x) = 2(s(x) - \operatorname{sen} x)(c(x) - \cos x) + 2(c(x) - \cos x)(-s(x) + \operatorname{sen} x) \equiv 0.$$

Então h é constante e calculamos $h(x) \equiv h(0) = 0$. Por h ser real e ser uma soma de quadrados, cada termo deverá ser zero: $s(x) - \operatorname{sen} x \equiv 0$ e $c(x) - \cos x \equiv 0$, então $s(x) \equiv \operatorname{sen} x$ e $c(x) \equiv \cos x$.

37: Identifique ou formule um PVI para cada um dos problemas 26–31. Quais são as interpretações das condições iniciais?

38: Dê o significado de um PVI que fosse formulado para os problemas estudados em 20–25. A respeito de 20, fixe condições literais e resolva-o de acordo com a solução apresentada para a equação diferencial.

39: Uma cultura de bactérias continha inicialmente um milhão de germes. Após uma hora, a população chegou a oito milhões. Se a taxa de crescimento da cultura for proporcional ao número de germes, determine em quanto tempo a população já havia dobrado.

Sugestão: Releia 26 e 27.

40: Via de regra, a solução geral de uma equação diferencial ordinária tem tantas constantes arbitrárias quanto é a ordem da equação. Derivando-se

essa solução geral o quanto for necessário e substituindo-se os dados do PVI, obtém-se um sistema algébrico que determina os valores dessas constantes univocamente.

Supondo já obtida a solução geral, como indicada, obtenha os valores dos parâmetros a partir das condições iniciais e encontre a solução específica:

41: $y = A \cos x$, $y(\pi) = 3$.

42: $y = A \operatorname{sen} x$, $y(\pi) = 4$.

43: $y = (C - x^2)/2x$, $y(x_0) = y_0$.

44: $y = A \operatorname{sen}(x - \theta_0)$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

45: $y = A \operatorname{sen}(x - \theta_0)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

46: $y = Ae^{2x} + Bxe^{-x} + \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Este é um bom momento para esclarecer o que serão os TEUs de que tanto falaremos:

47: Um *Teorema de Existência e Unicidade*, ou simplesmente "TEU", enuncia sob quais hipóteses um PVI tem solução (daí o termo "existência") e essa solução é única. (Para uma equação algébrica $ax^2 + bx + c = 0$, um enunciado análogo é este: "Se $b^2 = 4ac$, então existe uma única solução real.")

Nesse caso, a variável dependente regida pela equação diferencial tem seu comportamento totalmente determinado pelas condições iniciais. Costuma-se dizer que "o futuro é totalmente previsível e o passado é totalmente conhecido", especialmente quando a variável independente mede *tempo*.

Provaremos tais teoremas em várias situações.

48 Curvas não se cruzam: Suponha que valha um TEU para uma equação $y' = f(x, y)$ com certa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Chame os gráficos das soluções dessa equação de "curvas". Mostre e lembre sempre que:

(i) por cada ponto do plano, passa alguma curva;

(ii) duas curvas jamais se cruzam, juntam ou separam; portanto,

(iii) as curvas são paralelas e formam uma "foliação" (partição) do plano.

Esquematize isso em um diagrama. Adapte essa descrição a equações de graus mais altos.

1.4 Coisas que já sabemos fazer

Conhecendo o Cálculo básico e usando a manipulação algébrica escolar, já podemos resolver ou estudar algumas equações diferenciais e, também, aprender raciocínios e detalhes que serão úteis posteriormente. Esta seção explora essas aplicações e técnicas.

Na Seção **??**, apresentaremos engenhos que "resolvem" equações diferenciais ordinárias. O leitor com interesse em máquinas e mecanismos já pode estudar essa seção e interpretar visualmente como relacionam-se os termos de uma equação diferencial.

49 TFC: Dada $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ contínua e um ponto $(x_0, y_0) \in]a,b[\times \mathbb{R}$, existe uma única $y\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ derivável tal que $y'(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$ e $y(x_0) = y_0$.

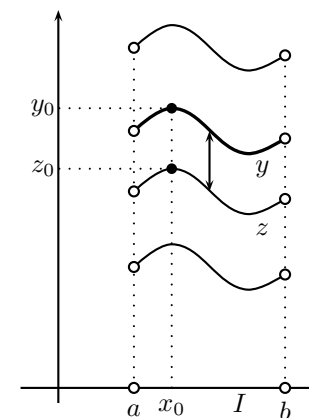
Solução: Primeiramente, note que esse enunciado é um TEU; o PVI em questão é $y' = f$, $y(x_0) = y_0$.

Pelo *Teorema Fundamental do Cálculo,*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$$

é solução tanto da equação $y' = f$ como da condição $y(x_0) = y_0$. Para saber porque escrevemos tal integral assim, reveja a resolução do problema 33.

Essa solução ao PVI é única: suponha $w\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ tal que também $w' = f$. Então $(w - y)' = w' - f = 0$, ou seja, $w - y = k$ constante real. Se ainda $w(x_0) = y_0$, temos $k = (w - y)(x_0) = 0$, donde $w = y$.

50: O mesmo raciocínio já prova mais: Se, analogamente, z satisfaz $z'(x) = f(x)$ e $z(x_0) = z_0$, novamente temos: $(y - z)' = 0$, então $y - z$ é constante, donde $y - z = y(x_0) - z(x_0) = y_0 - z_0$. Assim, se as condições iniciais y_0, z_0 estão próximas, as soluções y, z estão uniformemente próximas e, melhor ainda, diferem por uma constante — ou seja, as soluções para diferentes valores iniciais são todas translações verticais umas das outras:

51 TVM: Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$. Esse é o *Teorema do Valor Médio.* Convença-se disso por uma ilustração e estude a demonstração em seu texto favorito de Cálculo.

Ele já é usado em 49, formalmente, na demonstração da unicidade.

52: O mesmo problema de existência e unicidade proposto em 49, considerando-se a equação $y' = ky$ para $k \in \mathbb{R}$.

Solução: Verifique que e^{kx} é uma solução de $y' = ky$. (Na Seção 2.1, veremos como encontrar essa primeira solução.) Se y é solução,

$$(ye^{-kx})' = y'e^{-kx} + ye^{-kx}(-k) = kye^{-kx} - kye^{-kx} = 0,$$

isto é, $ye^{-kx} = C$ para alguma constante C. Logo, $y(x) = Ce^{kx}$. Como $y(x_0) = y_0$, vemos que $C = y_0e^{-kx_0}$ e então $y(x) = y_0e^{k(x-x_0)}$, unicamente determinada. Se $\exists x\, y(x) = 0$, então $y_0 = 0$ e portanto $y = 0$.

Gráficos: Trace os gráficos correspondentes a alguns (x_0, y_0), em cada caso $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$ separadamente. Observe que, pela existência demonstrada, uma curva passa por cada ponto de $]a,b[\times \mathbb{R}$; pela unicidade, essas curvas não se intersectam.

Vejamos mais alguns usos do ferramental de Cálculo:

53: Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que se a equação $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ não tem soluções constantes, então ela também não tem soluções periódicas.

Solução: Já que $\ddot{x} = f$ e f é contínua, deduzimos que x deve ser diferenciável duas vezes e $\ddot{x}$ deve ser contínua, ou seja, qualquer solução $x(t)$ da equação é de classe C^2. Como a equação não admite solução constante,

então $\forall c\, f(c, \dot{c}) \neq \ddot{c}$, isto é, $f(c, 0) \neq 0$. Porque f é contínua e $f(\cdot, 0)$ nunca se anula, então $f(x(t), 0)$, como função de t, também é contínua e é sempre positiva ou sempre negativa. Assuma $\forall t\, f(x(t), 0) > 0$; o outro caso pode ser tratado analogamente.

Suponha que $x(t)$ é uma solução periódica, isto é, existe $T > 0$ tal que $\forall t\, x(t + T) = x(t)$. Em $[0, T]$, por ser de classe C^2, a função x tem um ponto de máximo t_1; então, $\dot{x}(t_1) = 0$. Agora, usamos a própria equação para calcular $\ddot{x}(t_1) > 0$.

Pelo "teste da segunda derivada", t_1 também é ponto de mínimo de x. Assim, x é constante em $[0, T]$. Como x é periódica, concluímos que ela deve ser constante em todo $\mathbb{R}$, contrariando a hipótese inicial.

54 Continuidade: Vimos em 53 que a solução da equação diferencial deve ser de classe C^2 e fizemos uso fundamental desse fato. Vamos, então, rever o raciocínio:

(i) A equação diferencial dada é de segunda ordem, então qualquer solução $x(t)$ dessa equação, para realmente ser solução (por substituição), deverá ser derivável duas vezes.

(ii) Isso requer que $\dot{x}$ seja derivável e, portanto, contínua; analogamete, x deve ser derivável e contínua.

(iii) Como $f, x, \dot{x}$ são todas funções contínuas, então também a composição $f(x(t), \dot{x}(t))$ é contínua como função de t. Mas, de acordo com a equação dada, essa função é $\ddot{x}(t)$. Concluímos que $\ddot{x}$ também é contínua, ou seja, que x é de classe C^2.

Conclusão: Os detalhes variam de equação para equação, assim como os domínios das funções envolvidas, mas, geralmente, uma solução de uma equação diferencial ordinária deverá ser derivável em algum domínio e, assim, *contínua* nele.

Algumas soluções de equações diferenciais são descritas por expressões diferentes em subconjuntos de seus domínios. Os parâmetros que surgem nessas descrições podem ser conhecidos através do valor inicial dado e impondo-se continuidade; determine-os a seguir:

55: Considere

$$y(x) = \begin{cases} x + A & \text{se } x \leqslant 0, \\ Bx^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2, \\ C/x & \text{se } x > 2, \end{cases}$$

com $y(1) = 3$.

Solução: A condição $y(1) = 3$ aplica-se à expressão $y(x) = Bx^2$, donde $3 = B \cdot 1^2$ e obtemos $B = 3$. Para que y seja contínua em $x = 0$, devemos ter $0 + A = B \cdot 0^2$, donde $A = 0$. Em $x = 2$, devemos ter $B \cdot 2^2 = C/2$, donde $C = 24$.

56: Considere

$$y(x) = \begin{cases} A - x^2 & \text{se } x \leqslant -1, \\ B(x + 2) & \text{se } -1 < x \leqslant 1, \\ e^{Kx} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

com $y(0) = 6$.

57: Considere

$$y(x) = \begin{cases} A \cos(\pi x) & \text{se } x \leqslant 1, \\ Bx + B/x & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

com $y(1) = -3$.

Na resolução em 21, transformamos as constantes de integração a fim de simplificar as expressões resultantes. Mesmo no Cálculo básico, quando do cálculo de primitivas, operamos assim algumas vezes: é a chamada "absorção de constantes". Mostre que estas substituições são válidas:

58: $-K/3$, com $K \in \mathbb{R}$, equivale a C, com $C \in \mathbb{R}$.

Solução: De fato, $C = -K/3$ e $K = -3C$ definem funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inversas uma da outra.

59: e^K, com $K \in \mathbb{R}$, equivale a C, com $C > 0$.

60: $\ln K$, com $K > 0$, equivale a C, com $C \in \mathbb{R}$.

61: $\frac{(A+BC)^4}{C^2+D^2}$, com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, equivale a k, com $k \geqslant 0$. E $\frac{(A+BC)^4+1}{C^2+D^2}$?

62: $A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta$, com $A, B \in \mathbb{R}$, equivale a $k \cos(\theta - \theta_0)$, com $k \geqslant 0$ e $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$.

Sugestão: Teste seu raciocínio com $-\cos \theta = \cos(\theta \pm \pi)$.

Há simplificações análogas que dependem da continuidade de funções:

63: $|f(x, y)| = K$, com $K \geqslant 0$, equivale a $f(x, y) = C$, com $C \in \mathbb{R}$, desde que f seja contínua. Dê um contra-exemplo com f descontínua.

64: $|f| = e^K g$, com $K \in \mathbb{R}$, equivale a $f = Cg$, com $C \in \mathbb{R}$, desde que f e g sejam contínuas e não se anulem.

Note: Isso significa que f não pode "saltar" entre Cg e $-Cg$, exceto onde f e g tiverem raízes.

65: $(f)^2 = g$ equivale a $f = \sqrt{g}$ ou $f = -\sqrt{g}$, desde que f ou g sejam contínuas e não se anulem.

66: Uma função contínua que satisfaz uma equação algébrica quadrática é igual a uma das duas expressões dadas pela fórmula da Bhaskara, onde estas não se anularem.

Aplicaremos estas últimas análises, ou outras similares, às soluções de equações diferenciais que devem ser contínuas, como discutimos acima. Elas também valem para o estudo de funções e soluções implícitas, que veremos a seguir. Por exemplo:

67 Solução singular: Considere $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$.

Essa equação é quadrática em y'; isolando esta derivada, obtemos (por continuidade):

$$y' = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{y}{x}}$$

que requer $x \neq 0$ e $1 + y/x \geqslant 0$. Essas são duas equações homogêneas (na nomenclatura da Seção 2.1) que estudaremos em **??** e **??**. Porém, há mais a ser discutido aqui:

Em $x = 0$, qualquer solução deverá satisfazer $y = 0$, como se deduz por substituição na equação original.

Quando $1 + y/x < 0$, o discriminante da equação quadrática é negativo e não há valor real de y' possível para tais valores de x e y, de modo que não há função real derivável que possa satisfazer a equação diferencial dada. Isso prova que esse caso realmente não admite soluções.

Se $1 + y/x = 0$, ou seja, $y = -x$, então as duas equações homogêneas acima são a mesma equação $y' = -1$, de que a mesma função $y = -x$ é solução; essa é chamada *solução singular* da equação original. Note que ela *não* é dada, com nenhum valor de C, pelas soluções $C \pm 2\sqrt{Cx}$ (se $x > 0$) e $-C \mp 2\sqrt{-Cx}$ (se $x < 0$) das equações homogêneas, coletivamente chamadas *solução geral* da equação dada.

Sabemos ainda que não podemos usar a fórmula de Bhaskara onde se anular. Aqui, isso ocorre quando $y = 0$ e outras informações deverão ser utilizadas se um PVI especificar $y(x_0) = 0$. Note que a solução constante 0 é dada por $C = 0$ na solução geral e que, para qualquer valor de C, a solução geral anula-se somente quando $x \to 0$, permitindo a "troca" de uma expressão por outra.

68 Verificação: Na Seção 1.1, verificamos se algumas funções eram, ou não, soluções das equações dadas. Fazíamos uma "checagem" similar quando calculávamos primitivas, derivando o resultado de nossa conta e comparando-o com a função original.

Esse procedimento é importante e deve ser sempre feito, não apenas por si, mas porque pode consistir em um passo adicional na resolução de uma equação.

69 Exemplo: Os métodos que estudaremos na Seção 2.1 permitirão encontrar a seguinte solução para a equação $y' + 1 = \sqrt{1 + y/x}$, de que já falamos acima:

$$y(x) = K^2 - 2K\sqrt{x}$$

para $x > 0$ (veremos isso em **??**, juntamente com o caso $x < 0$).

Substituindo na equação, assumindo $x > 0$, vem:

$$- 2K\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 = \sqrt{\frac{x + K^2 - 2K\sqrt{x}}{x}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x} - K}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{(K - \sqrt{x})^2}}{\sqrt{x}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} - K = |K - \sqrt{x}|.$$

Essa última identidade — e, portanto, o fato da função proposta ser realmente solução da equação dada — somente pode ser verdadeiro se $K \leqslant \sqrt{x}$.

Para tanto, ou $K \leqslant 0$ e essa condição vale para todo $x > 0$, ou $K > 0$ e essa condição somente vale para $x \geqslant K^2$. Assim, o domínio de validade da solução depende da constante envolvida, ou seja, do valor inicial em um PVI.

No primeiro caso, podemos escrever $K = -\sqrt{C}$ com $C \geqslant 0$ e escrever $y(x) = C + 2\sqrt{Cx}$ para $x > 0$, o que altera significativamente a forma da solução. No segundo, escrevemos $K = \sqrt{C}$ com $C > 0$ e $y(x) = C - 2\sqrt{Cx}$ *apenas* para $x \geqslant C$.

Essa conclusão chama a atenção para outro assunto:

70 Intervalo de definição: Dado o PVI $y' = y^2$, $y(0) = y_0$, descubramos o maior domínio conexo (intervalo) que uma solução pode ter.

Para resolver essa equação, podemos proceder como na Seção 1.2: integramos $y^{-2}\,dy = dx$, obtendo $-y^{-1} = x + C$, donde

$$y(x) = \frac{-1}{x + C}.$$

Substituindo-se o valor inicial dado, temos $y_0 = -1/C$ ou $C = -1/y_0$. Se $y_0 \neq 0$, isso resolve o problema; se $y_0 = 0$, observamos que a solução singular constante 0 é obtida tomando-se $y_0 \to \pm 0$ e $C \to \mp\infty$. Ambos os casos são contemplados na fórmula final

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x},$$

obtida multiplicando-se numerador e denominador por $-y_0$.

Para $y_0 = 0$, essa função está definida em todo o eixo Ox. Para $y_0 \neq 0$, seu maior domínio é $\mathbb{R} - \{1/y_0\}$. Procuremos agora o maior *intervalo* I que possa ser usado como domínio de y. Note que, para o PVI fazer sentido, precisamos que I contenha o ponto inicial 0. Concluímos assim:

- se $y_0 > 0$ então $I =]-\infty, 1/y_0[$;
- se $y_0 < 0$ então $I =]1/y_0, +\infty[$;
- se $y_0 = 0$ então $I = \mathbb{R}$.

Há um exercício variante da verificação de soluções: Forme equações diferenciais, eliminando os parâmetros constantes, cujas soluções sejam as funções $y(x)$ indicadas a seguir.

71: $y = C\sqrt{x}$.

Solução: Temos

$$y' = \frac{C}{2\sqrt{x}} = \frac{C}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{y}{2x},$$

de onde obtemos $2xy' = y$ com o parâmetro C eliminado.

72: $y = Cx$.

Atenção: Derivando os dois lados, temos $y' = C$; essa é uma equação diferencial, mas há dois inconvenientes: (i) produziu-se uma equação para cada valor do parâmetro C, em vez de uma única equação, enquanto C continua a aparecer; (ii) as funções $y = Cx + D$ também satisfazem essa equação, assim como $y'' = 0$.

73: $y = 8x + C$.

74: $y = ax + b$.

75: $y = ax^2 + bx + c$.

76: $y = Cx^2$.

77: $y = Ce^{3x}$.

78: $y = A\,\mathrm{sen}(5x - \theta)$.

79: $x^2 + y^2 = R^2$ (onde a função y é dada implicitamente, veja a seguir).

Finalmente, abordamos o assunto de funções implícitas prometido:

Mostre que, para cada equação diferencial abaixo, a relação indicada é "integral", isto é, se a segunda igualdade define implicitamente uma função $y(x)$, então essa função é solução da primeira equação. Já fizemos algo parecido em Cálculo básico: é a chamada *derivação implícita,* quando basta derivar os dois lados de uma igualdade.

80: $(3x - 2y)y' = 2x - 3y$, $x^2 - 3xy + y^2 = C$.

Solução: Derivando a segunda igualdade com respeito a x, obtemos $2x - 3(y + xy') + 2yy' = 0$, ou seja, $2x - 3y = 3xy' - 2yy' = (3x - 2y)y'$, como necessário.

81: $x = yy'$, $x^2 - y^2 = C$.

82: $(5x - 3y^2)y' = 3x^2 - 5y$, $x^3 + y^3 = 5xy$.

83: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x = 2e^{xy}$.

84: Chamamos atenção para esses problemas porque, em geral, expressar a solução de uma equação diferencial explicitamente, embora desejável, é impraticável. Por exemplo, expressar y como função de x em $\mathrm{sen}(xy) = \cos(x/y)$ ou em $x = y^3 - e^y$ é tarefa complexa, que não temos como estudar enquanto nos preocupamos com as equações diferenciais em si.

Veja a Seção 2.3, ponto 132, como exemplo de soluções dadas nessa forma. Alguns textos, como [Dem], fornecem várias respostas em forma implícita.

85: Entretanto, os Teoremas da Função Implícita e da Função Inversa permitem-nos, respectivamente, estudar o comportamento *local* das soluções dadas por essas expressões. Novamente na Seção 2.3, por exemplo, ao provarmos um TEU no item 139, faremos uso desses teoremas.

Enunciaremos versões univariáveis desses resultados tradicionalmente expostos em cursos finais de Cálculo (como [Rud]), mas importantes não só em Análise, como também em outras disciplinas, como Mecânica e Geometria Diferencial.

86 Função Inversa: Sejam Ω intervalo aberto e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Se $x_0 \in \Omega$ é tal que $f'(x_0) \neq 0$, então existem intervalos abertos U, V de modo que $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$, $f|_U\colon U \to V$ é uma bijeção e sua inversa é de classe C^k.

87 Função Implícita: Sejam Ω região de $\mathbb{R}^2$ e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Se $(x_0, y_0) \in \Omega$ é tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existem região $W \subseteq \mathbb{R}^2$ e intervalo aberto U de modo que $(x_0, y_0) \in W$, $x_0 \in U$ e, para todo $x \in U$ existe único $g(x) \in \mathbb{R}$ tal que $(x, g(x)) \in W$ e $f(x, g(x)) = 0$; a função $g\colon U \to \mathbb{R}$ assim definida é de classe C^k e $g'(y_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)/\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

88: Dê contra-exemplos de funções cujas derivadas não respeitem as condições de cada teorema.

89: Dê contra-exemplos para enunciados "globais" de ambos os teoremas.

Algumas respostas e indicações

Apresentamos as respostas para uma parcela representativa dos exercícios. Em geral, abreviamos as demonstrações e as soluções finais.

9: Sim. **10:** Não. **11:** Sim. **12:** Não. **13:** Sim. **14:** Sim. **23:** $y^2(1 + (y')^{-2}) = 1$. **24:** $(y')^2x^2 = y^2$. **25:** $xy' = y$. **28:** $\dot{x} = -2.10^{-5}x$. **29:** Separe: $\frac{dx}{x} = -2.10^{-5}\,dt$. Integre: $\ln x = -2.10^{-5}t + C$, donde $x(t) = K\exp(-2.10^{-5}t)$ com $K > 0$. (Note $x \geqslant 0$.) Determine K com $x(0) = 36$ e resolva $x(t) = 12$. **30:** Sendo $\mathrm{s}(x) = \pm 1$ o sinal de x, temos $m\ddot{x} = -\mathrm{s}(x)GMm/x^2$. (Se $x > 0$ ou $x < 0$ então $F < 0$ ou $F > 0$, resp., porque a força gravitacional é atratora.) Simplificando: $\ddot{x}x|x|$ igual a uma constante estrit. negativa. Não vale no centro porque se assumiu $x \neq 0$ para escrevê-la; a força atratora aí será infinita. **31:** $\ddot{x}x|x| = -GR^3\delta 4\pi/3$ para $x > R$ ou $x < -R$ e $\ddot{x} = -xG\delta 4\pi/3$ para $-R \leqslant x \leqslant R$. (Usamos $x|x|$ em vez de $x^2(\mathrm{s}(x))^{\pm 1}$.) Ao passar pelo centro ou pela superfície, a sonda continuará seu movimento sem perturbação. No centro, a equação permanecerá válida porque a força atratora será contínua e nula. Na superfície, a lei do movimento (solução da equação) mudará porque a equação mudará. **34:** $A = s_0 + \gamma t_0^2/2 - V_0t_0$ e $B = V_0 - \gamma t_0$; fatorando-se, $s(t) = \gamma(t-t_0)^2/2 + V_0(t-t_0) + s_0$. **38:** Trata-se de fixar um ponto pelo qual a curva passa. Sol. para 20: $y = x_0y_0/x$. **39:** Quinze minutos: Seja $x(t)$ o tamanho da população em função do tempo. O enunciado informa $\dot{x} = \alpha x$ com cte. $\alpha > 0$. Então $x(t) = ke^{\alpha t}$ com cte. $k > 0$ (porque $x > 0$). Dados numéricos implicam $1 = ke^{\alpha 0}$ e $8 = ke^{\alpha 1}$; determine k, α e resolva $2 = ke^{\alpha t}$ para obter t. Note também: a população dobra três vezes em 1h, então dobra uma vez a cada $\frac{1}{4}$h; não há proporção direta. **41:** $y = -3\cos x$. **42:** Não existe função. **43:** $y = (2x_0y_0 + x_0^2 - x^2)/2x$. **44:** $y = \operatorname{sen}(x - \pi/2) = -\cos x$. **45:** $y = 2\operatorname{sen} x$. **46:** $y = -e^{2x} + 2xe^{-x}$. **56:** $A = 4$, $B = 3$, $K = 2\ln 3$.

BASICÃO DE EDO

Vinicius Cifú Lopes

Versão Preliminar

Capítulo 2

Primeira ordem

As equações de primeira ordem são aquelas que envolvem apenas a variável independente, a função incógnita e sua primeira derivada. Estudaremos diversos tipos dessas equações cujas soluções podem ser escritas explicitamente, começando pelas de variáveis separáveis, que já utilizamos no primeiro capítulo. Cada forma específica comporta uma demonstração particularizada de um TEU, mas apresentaremos também um estudo qualitativo geral e abstrato para a forma normal das EDOs de primeira ordem.

2.1 Separação de variáveis

90: Uma *equação de variáveis separáveis* tem a forma

$$\text{(VS)} \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),\ y(x_0) = y_0,$$

onde já incluímos um PVI.

São casos particulares as equações autônomas (que veremos em 121, ainda nesta seção, com $f \equiv 1$) e o cálculo de primitivas (com $g \equiv 1$).

91: Para resolvê-la, basta desmembrar as diferenciais e passar *todas* as ocorrências de cada variável (x, y) para cada lado da igualdade:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx.$$

Desse modo, podemos integrar ambos os lados usando técnicas de Cálculo básico e, então, isolar y em termos de x. A constante de integração terá seu valor determinado pelo PVI.

Esse "desmembramento" das diferenciais pode parecer misterioso ao estudante de Cálculo, para quem foi sempre dito que $\frac{dy}{dx}$ deveria ser tratado como um único "bloco" e não como uma fração. Ao demonstrar o TEU, veremos como esse procedimento se justifica.

92: Para integrarmos, é fundamental que cada lado da equação contenha apenas uma variável. Assim, nem toda equação tem variáveis separáveis e, caso tenha, isso pode não ser aparente: Procure sempre fatorar a expressão dada para verificar a possibilidade de separar as variáveis!

(Nota: Não conhecemos a referência bibliográfica para o próximo exemplo, mas preferimos adotá-lo por sua simplicidade e pela discussão lógica e gráfica que permite.)

93 Exemplo: $x(1+y^2)\,dx - y(1+x^2)\,dy = 0$, $y(x_0) = y_0$.

Rearranjando a equação dada, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1+y^2}{y}$$

de variáveis separáveis, mas essa operação requer que a solução $y(x)$ não se anule. Suponha, então, que $y(x) = 0$ para algum valor de x: substituindo na equação original, vem $x(1+0^2) - 0(1+x^2)y' = 0$, ou simplesmente $x = 0$. Assim, toda solução que se anula só poderá fazê-lo na origem e doravante, portanto, assumimos $y_0 \neq 0$ e que y não se anula.

Agora, isolamos e integramos:

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + y^2 = k(1+x^2) \text{ onde } k > 0.$$

Substituindo a condição inicial $y(x_0) = y_0$, obtemos $k = \frac{1+y_0^2}{1+x_0^2}$, ou seja,

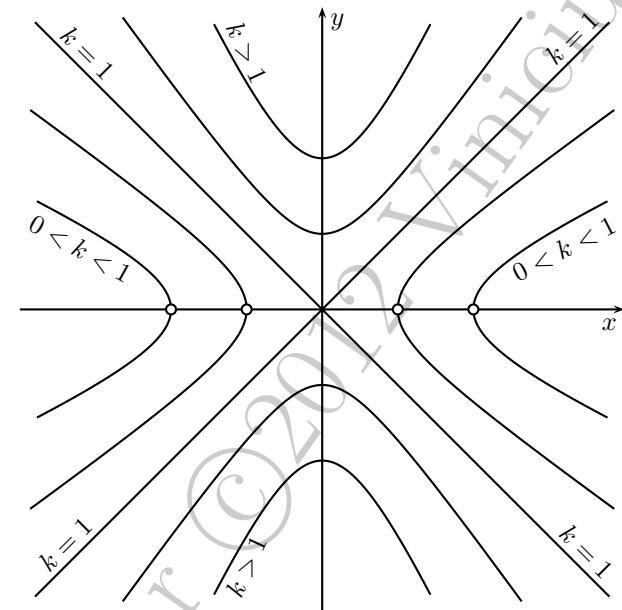
$$y = \pm\sqrt{\frac{1+y_0^2}{1+x_0^2}(1+x^2) - 1}.$$

Análise gráfica: É fácil rearranjar a identidade obtida na forma tradicional da equação de hipérbole: $y^2 - kx^2 = k - 1$.

Se $k > 1$, podemos calcular $y(x) = \pm\sqrt{kx^2 + k - 1}$; cada sinal especifica uma função que descreve um ramo inteiro e está definida em todo o $\mathbb{R}$.

Quando $0 < k < 1$, há um intervalo onde $kx^2 + k - 1$ é negativo, de modo que os ramos correspondem somente a funções definidas em semi-retas. Como devem ser funções, cada uma descreve apenas metade de um ramo. Não há solução nos vértices dos ramos, de acordo com nossa discussão inicial.

Para $k = 1$, temos $y = \pm x$ e podemos distinguir entre essas possibilidades usando a condição inicial, já que assumimos $y_0 \neq 0$: se $y_0 = x_0$ então $y(x) = x$; se $y_0 = -x_0$ então $y(x) = -x$. Como essas retas passam pela origem, podemos tomá-las como soluções definidas em todo o $\mathbb{R}$.

Concluímos com o seguinte esquema:

Atenção: As soluções com $k = 1$ são retas, ou seja, são hipérboles degeneradas. Contudo, *não* são as assíntotas das demais hipérboles que particionam o plano. Mostre, com as fórmulas básicas de Geometria Analítica, que as assíntotas da hipérbole $1 + y^2 = k(1+x^2)$ são retas passando pela origem e com coeficiente angular $\pm\sqrt{k}$. Desse modo, as hipérboles *não* têm as mesmas assíntotas e "fecham-se" progressivamente conforme são mais afastadas da origem.

94: Faça o mesmo estudo algébrico e gráfico para o PVI $x\,dx + y\,dy = 0$, $y(x_0) = y_0$.

Resolva estas equações por separação de variáveis:

95: $y' \operatorname{tg} x = y$.

96: $x\,dy + y\,dx = 0$.

97: $xyy' = 1 - x^2$.

98: $y' = e^{x-y}$.

99: $(xy^2 + x)\,dx + (x^2y + y)\,dy = 0$.

100: $y' - e^{-y} + 1 = 0$.

101: $x^2y' - y = 1 - xy'$.

102: $xy' = y^2 + 1$.

Resolva os problemas de valor inicial:

103: $x\,dy + y\,dx = 0$, $y(2) = 4$.

104: $x\,dy + y\,dx = 0$, $y(0) = 0$.

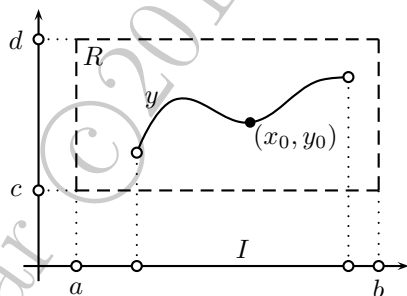
105: $x^2y' - y = 1 - xy'$, $y(1) = 3$.

106: $x^2\,dy - y^2\,dx = 0$, $y(1) = 1$.

107: $y' = 2\sqrt{y}\,\ln x$, $y(1) = 1$.

108: $(x^2+1)y' = \sqrt{1-y^2}$, $y(1) = 1$.

Discutiremos a existência e a unicidade de soluções de (VS) em dois casos: (i) assumindo que g não se anula e, depois, (ii) assumindo que as raízes de g são isoladas e trabalhando nelas.

109 TEU: Sejam $f\colon\,]a,b[\to \mathbb{R}$ contínua e $g\colon\,]c,d[\to \mathbb{R}$ contínua que não se anula. Então, para cada ponto (x_0, y_0) do retângulo $R =]a,b[\times]c,d[$, (VS) tem uma única solução $y\colon I \to]c,d[$, onde I é um intervalo aberto contido em $]a,b[$ e contendo x_0.

Observe, em 93, os gráficos e os domínios das soluções com $0 < k < 1$: elas não estão definidas em todo $\mathbb{R}$ e são um exemplo de que, aqui, não podemos pretender que I seja todo o intervalo $]a,b[$.

A demonstração desse TEU será feita em dois pontos:

110 Existência: Sejam F, G primitivas de $f, \frac{1}{g}$, respectivamente; isso é garantido pela continuidade destas duas funções. A função G é estritamente monótona pois sua derivada $\frac{1}{g}$ não se anula e então, por continuidade, tem sempre o mesmo sinal. Assim, sua imagem é um intervalo aberto J e existe a função inversa $G^{-1}\colon J \to]c,d[$.

Como derivada de constante é zero, podemos transladar F verticamente de modo que $F(x_0) = G(y_0)$. Porque F é contínua, existe então um intervalo aberto I tal que $x_0 \in I \subseteq]a,b[$ e ainda $F[I] \subseteq J$.

Assim, podemos definir $y\colon I \to]c,d[$ simplesmente como a composição $y = G^{-1} \circ F$. Note que obtemos $y(x_0) = y_0$.

Para verificar a solução, derivamos a identidade $F = G \circ y$ utilizando a Regra da Cadeia:

$$f = F' = (G \circ y)' = (G' \circ y) \cdot y' = \frac{1}{g \circ y} \cdot y',$$

donde $y' = f \cdot (g \circ y)$, como desejado.

111 Unicidade: Continuemos trabalhando com as mesmas primitivas F, G acima, mas agora suponhamos que temos uma solução y qualquer. Mostraremos que, em I, essa função y é igual à mesma solução $G^{-1} \circ F$ que já calculamos.

Nesse intervalo, podemos calcular $(G \circ y) - F$ e derivá-la. Vem

$$(G \circ y)' - F' = \frac{1}{g \circ y} \cdot y' - f = 0$$

porque y é solução de (VS). Desse modo, $(G \circ y) - F$ é constante e seu valor é, por substituição, $G(y(x_0)) - F(x_0) = 0$. Concluímos que $G \circ y = F$ e basta calcular G^{-1} em ambos os lados dessa igualdade.

Destacamos o seguinte escólio, que explica a abundância de soluções dadas implicitamente:

112: Se $G' = 1/g$, obtemos a solução implícita $G(y) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + G(y_0)$.

113: Agora, consideramos o caso em que g tem raízes e, portanto, não se pode calcular $1/g$; assumiremos ainda que essas raízes são todas isoladas. (A maioria das questões práticas satisfaz essa condição.)

Pode-se aplicar o TEU anterior nestas restrições do domínio de g:

(i) em um intervalo aberto entre quaisquer duas raízes consecutivas de g;

(ii) se $g(y_0) \neq 0$, em um intervalo aberto contendo y_0 onde g não se anule.

114: Se $g(y_0) = 0$, então a função constante y_0 é solução do PVI (VS); note que sua derivada é zero em x_0 (e sempre). Qualquer outra solução y também terá $y'(x_0) = 0$ em vista da equação:

$$y'(x_0) = f(x_0) \cdot g(y(x_0)) = f(x_0) \cdot g(y_0) = f(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Assim, como veremos nos exemplos-exercício abaixo, nas raízes de g pode ocorrer (ou não) o seguinte fenômeno: há soluções cujos gráficos tangenciam a reta horizontal $y = y_0$ e, desse modo, são tangentes também entre si. (Não há soluções que se cruzam.)

Já que vale o TEU entre as raízes de g, são únicas as soluções entre as retas horizontais definidas por essas raízes, e são obtidas pelo método que discutimos acima. Assim, caso alguma solução conflua com, ou bifurque de, uma das soluções constantes, deverá assumir a forma dada pelo método.

Conclusão: Para g com raízes isoladas, (VS) sempre tem ao menos uma solução e as únicas soluções possíveis da equação dada são

(i) as funções constantes que são raízes de g (são as soluções singulares, também chamadas *equilíbrios* da equação) e

(ii) aquelas dadas pelo método de separação de variáveis (são as regulares),

embora (VS), como um PVI específico, possa ter não apenas uma solução.

Conhecendo-se as soluções regulares, devemos inspecioná-las para verificar se incluem, em sua forma, as singulares, mas isso é diferente da possibilidade de aquelas tangenciarem estas. Se isto não acontecer, conclui-se por um TEU irrestrito.

Resolva cada uma das equações abaixo com a condição $y(x_0) = y_0$ e identifique qual das situações descritas acima ocorre.

115: $y' = -xy^{-1}$.

116: $y' = 2xy^2$.

117: $y' = x^{-1}y$.

118: $y' = 1 + y^2$.

119: $y' = 3y^{2/3}$.

120: $y' = x^{-2}$.

No restante desta seção, concentraremos nossa atenção em um caso particular muito útil da forma (VS) e em uma modalidade típica de aplicações desse tipo de equações.

121: Uma *equação autônoma* é aquela em que a variável independente não consta explicitamente e tem a forma $y' = g(y)$. Note que essa equação tem variáveis separáveis!

122: Suponha que $g\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua e não se anula, sendo I um intervalo aberto. De acordo com o TEU para (VS), fixado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times I$, o PVI $y' = g(y)$, $y(x_0) = y_0$ tem uma única solução definida em um intervalo aberto contendo x_0.

123: Mostre que podemos assumir $x_0 = 0$.

124: As equações autônomas surgem especialmente na descrição de fenômenos naturais que descrevem a evolução de alguma quantidade ao longo do tempo, mas em que a marcação do tempo, em si, é irrelevante.

Por exemplo, nos pontos 26 e 27, conhecemos a equação de decaimento radioativo

$$\dot{Q} = -\frac{\ln 2}{\tau} Q$$

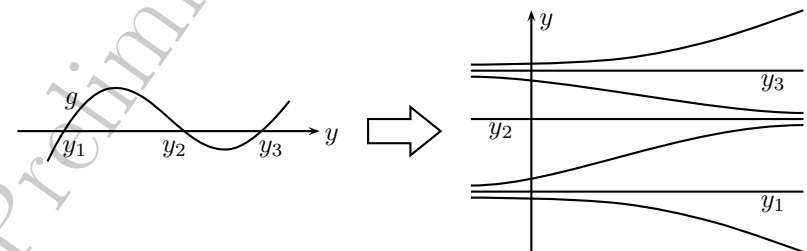
em termos da meia-vida τ da substância em estudo. Evidentemente, tanto a condição de valor inicial $Q(0) = Q_0$ como a solução $Q = Q_0 e^{-t(\ln 2)/\tau}$ envolvem a variável t que mede o tempo, mas a equação diferencial indica a taxa de variação de Q apenas em termos de condições contemporâneas (no caso, o próprio valor de Q). Em outras palavras, o fenômeno estudado e a equação obtida não dependem de um "calendário" específico.

O ponto anterior sugere que, nesse caso, não há perda de generalidade em supor-se sempre o instante inicial sendo 0.

Como exemplos, na próxima seção, daremos destaque a modelos populacionais e epidemiológicos, mas voltaremos a encontrar equações autônomas em outras aplicações.

125: A título explanatório, digamos que g está definida em toda a reta real e tem três raízes reais y_1, y_2, y_3. Sabemos que as funções constantes correspondentes são soluções de $y' = g(y)$ e já as chamamos de *equilíbrios* dessa equação. Outras soluções podem ou não tangenciar com, confluir com, ou birfucar-se de cada equilíbrio.

126: Em caso negativo. quando nenhuma solução corta as retas $y = y_1$, $y = y_2$ e $y = y_3$, a situação é descrita pelo diagrama abaixo. Ele assume que as soluções estão definidas e são contínuas em toda a reta real e ilustra estes fatos:

- já que $y' = g(y)$, a solução é crescente ou decrescente conforme g é positiva ou negativa;
- já que $y'' = g'(y) \cdot y'$, os pontos de máximo e mínimo de g indicam alguns dos valores de inflexão das soluções.

127: Essa análise sugere a seguinte classificação dos equilíbrios:

- *estável* se $g > 0$ antes (à esquerda, ou abaixo) do equilíbrio e $g < 0$ depois (à direita, ou acima) dele;
- *instável* se $g < 0$ antes e $g > 0$ depois;
- *semiestável* em outros casos.

Ou seja, o equilíbrio é estável (y_2 no exemplo) ou instável (y_1, y_3 no exemplo) quando as soluções em seu entorno aproximam-se ou afastam-se, respectivamente. A terceira possibilidade não é contemplada no exemplo e ocorre quando as soluções em um lado do equilíbrio aproximam-se dele, enquanto as do outro lado afastam-se.

Identifique e classifique os equilíbrios destas equações:

128: $y' = 2y(1 - y)$.

129: $y' = -3y(y - 1)(y + 2)^2$.

130: $\dot{x} = \ln(x - 2)$.

131: $\dot{x} = \operatorname{sen}(2x) \cos x$.

132: Mostre que todas as soluções entre os mesmos dois equilíbrios consecutivos (ou abaixo do menor equilíbrio, ou acima do maior equilíbrio) são todas translações horizontais umas das outras.

2.2 Dinâmica populacional

Os modelos de dinâmica populacional são excelentes exemplos de equações autônomas justamente por não dependerem de calendários. Aqui, estudaremos a formulação de alguns desses modelos e ilustraremos o estudo de equações autônomas através desses casos específicos. Qual modelo usar ou montar depende, afinal, de diversas hipóteses particulares de cada estudo e cada ciência.

133: Embora populações sejam intuitivamente medidas por variáveis discretas (cujos valores são números naturais), elas podem ser representadas por variáveis contínuas $x(t)$ que, na perspectiva deste assunto, são mais suscetíveis às ferramentas do Cálculo. Partes fracionárias, especialmente de números grandes, podem ser simplesmente ignoradas.

Outras quantidades frequentemente representadas assim são: proporções de indivíduos com certas características, dentre toda a população; probabilidades de eventos; concentrações ou densidades populacionais; biomassa (soma das massas, ou outra medida qualquer, de todos os indivíduos

da população); totais de capital e montante; até massas d'água ou tamanhos de ambientes ou corpos isolados.

Trabalharemos sempre com a condição inicial $x(0) = x_0$; para outros valores do instante inicial, procede-se por translação horizontal da solução, como vimos na seção anterior, ou adota-se uma convenção manual como "1990 é o ano base", de modo que 2015 corresponde a $t = 25$.

134 Malthus: A velocidade de crescimento proporcional à própria população é o postulado mais simples desse estudo. Ele corresponde à equação

$$\dot{x} = ax$$

com uma constante de proporção $a > 0$. A solução

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

descreve o famoso "modelo de crescimento exponencial".

A mesma expressão é válida quando $a < 0$, hipótese de interesse em casos como o decaimento radioativo ou a autofagia.

Experimentaremos algumas variações desse postulado e do modelo:

135: Se, em uma população de x indivíduos, há sempre $x/2$ machos e $x/2$ fêmeas, podemos supor que a taxa de crescimento $\dot{x}$ seja proporcional ao número de encontros entre machos e fêmeas que resultam em cópula. Esse número, por sua vez, é proporcional aos números de machos e fêmeas, então $\dot{x}$ deve ser proporcional a $(x/2)(x/2)$, ou simplesmente

$$\dot{x} = ax^2$$

para $a > 0$. (Resolva essa equação.)

136: Um modelo cuidados incorporará não somente o aumento populacional por nascimentos, mas também as perdas por falecimentos e até os fluxos migratórios. Diversas expressões podem ser usadas para representá-los, de acordo com as hipóteses feitas e a ciência estudada.

Por exemplo, se a taxa de mortalidade (proporcionalmente à população) for constante, então o termo $-bx$ (onde $b > 0$) é somado ao termo de crescimento, assim: os dois modelos anteriores ficam

$$\dot{x} = ax - bx = (a - b)x,$$
$$\dot{x} = ax^2 - bx.$$

Outro caso são as situações de grande violência, como guerras civis ou criminalidade. O mesmo raciocínio do ponto anterior pode ser usado para justificar o termo $-bx^2$ para as perdas por morte, proporcionalmente aos encontros entre dois indivíduos da população. Obtemos

$$\dot{x} = ax - bx^2,$$
$$\dot{x} = ax^2 - bx^2 = (a-b)x^2.$$

Resolva essas quatro equações e identifique se há mudanças estruturais em suas soluções, com relação às anteriores. Estude ainda a conseqüência das hipóteses $a > b$ e $a < b$.

137 Verhulst: Populações muito grandes enfrentam escassez de alimentos e espaço e têm seu crescimento dificultado e freado. Um modo de incorporar esse fato ao modelo malthusiano é impor um redutor $M - x$ que diminuirá a taxa de crescimento quando x é (menor que, mas) muito próximo de um limitante M:

$$\dot{x} = a(M-x)x.$$

Essa é a chamada "equação do crescimento logístico" ou, simplesmente, *equação logística*.

Ela é aplicada com sucesso em diversos estudos demográficos e também na modelagem de epidemias, em que x mede a proporção de infectados e a disseminação cresce proporcionalmente ao número $(100\%-x)x$ de encontros entre não-infectados e já infectados. Pode ainda ser interpretada segundo nossa experimentação anterior, quando posta na forma

$$\dot{x} = aMx - ax^2 = \alpha x - \beta x^2$$

(tomando-se $a = \beta$ e $M = \alpha/\beta$) que representa crescimento malthusiano com mortalidade por violência.

138: Resolva a equação de Verhulst por separação de variáveis, obtendo

$$x(t) = \frac{M}{1 - C\exp(-Mat)}.$$

Use a condição inicial $x(0) = x_0$ para determinar C e reformule x como

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)\exp(-Mat)}.$$

Essa forma da solução inclui ambos os equilíbrios 0 e M; mostre que, para outros valores de x_0, ela nunca iguala nem 0 nem M, provando "existência e unicidade" sempre.

139: Podemos estudar o comportamento dessa função e esboçar seu gráfico utilizando as técnicas de Cálculo elementar. Por exemplo, assumindo $a, M > 0$ e $0 < x_0 < M$, mostre que x tem domínio $\mathbb{R}$ e sempre $0 < x < M$ e calcule

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = M.$$

Entretanto, como veremos no próximo ponto, *não* é preciso manipular a fórmula explícita e complicada de x para efetuar a análise das primeira e segunda derivadas.

140: Já conhecemos a primeira derivada $\dot{x}$, dada pela própria equação:

$$\dot{x} = a(M-x)x > 0 \Rightarrow x \text{ é estritamente crescente}$$

(para $a, M > 0$). De modo análogo, calculamos

$$\begin{aligned}\ddot{x} = \tfrac{d}{dt}\dot{x} &= \tfrac{d}{dt}[a(M-x)x] = \\ &= a(0-\dot{x})x + a(M-x)\dot{x} = \\ &= a[-a(M-x)x] + a(M-x)[a(M-x)x] = \\ &= a^2(M-x)(M-2x)x.\end{aligned}$$

(Os colchetes indicam as substituições de $\dot{x}$ por $a(M-x)x$, para a derivação e para eliminar as duas ocorrências após a derivação.) Então temos $\ddot{x} = 0$ quando $x = M/2$ (e nos casos $x = 0, M$ que descartamos), $\ddot{x} > 0$ quando $0 < x < M/2$ e $\ddot{x} < 0$ quando $M/2 < x < M$.

Observe que não determinamos os *pontos* t onde as primeira e segunda derivadas anulam-se, mas os *valores* x nesses pontos. Assim, contrariamente ao hábito dos cursos de Cálculo, marcamos esses valores de interesse no eixo das ordenadas, não no das abscissas.

141: O valor $M/2$ pode ser interpretado assim, no contexto de contágio epidêmico mencionado na introdução à equação: ao atingir mais de 50% da população suscetível, o contágio deve desacelerar.

Inicialmente, há poucos portadores da doença e a disseminação é lenta, embora se acelere com o aumento dos portadores, porque há mais e mais portadores contaminando indivíduos sãos. Quando 50% da população está contaminada, a disseminação tem velocidade máxima, mas deve iniciar sua desaceleração porque, com a diminuição da parcela sã, encontros entre portadores e não-portadores tornam-se progressivamente menos frequentes.

142: A análise acima fez uso fundamental da hipótese $0 < x_0 < M$, que implicou que $0 < x(t) < M$ para todo instante t. Ela foi o que, em particular, garantiu valor sempre positivo para o denominador de $x(t)$ e a continuidade dessa solução em toda a reta real.

Em geral, devemos considerar quando o denominador anula-se:

$$x_0 + (M - x_0)\exp(-Mat) = 0.$$

Resolvendo em t, obtemos

$$T = \frac{-1}{Ma} \ln \frac{x_0}{x_0 - M},$$

chamado *ponto de turbulência.* Sua existência requer $x_0/(x_0 - M) > 0$ e, por sua vez, isso equivale às opções $x_0 > M$ ou $x_0 < 0$ (porque assumimos $M > 0$).

143: O gráfico da solução $x(t)$, quando há turbulência, tem dois ramos, à maneira das hipérboles: um para $t < T$ e outro para $t > T$; um está abaixo do equilíbrio 0 e outro acima do equilíbrio M. (A correspondência entre as duas dicotomias depende do sinal de x_0.)

A solução somente está continuamente definida no intervalo que contiver o instante inicial 0, seja $]-\infty, T[$ ou $]T, \infty[$. Distinguem-se, portanto, duas situações:

(a) $x_0 > M$, donde $x_0/(x_0 - M) > 1$ e $T < 0$; a solução está definida continuamente em $]T, \infty[$ e tem o gráfico superior no diagrama a seguir; mostre que

$$\lim_{t \to T^+} x(t) = \infty,$$
$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = M.$$

(b) $x_0 < M$, donde $x_0/(x_0 - M) < 1$ e $T > 0$; a solução está definida continuamente em $]-\infty, T[$ e tem o gráfico inferior no diagrama a seguir; mostre que

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0,$$
$$\lim_{t \to T^-} x(t) = -\infty.$$

144: A análise restante é similar à anterior, notando-se que $\dot{x} < 0$ e calculando-se o sinal de $\ddot{x}$. Concluímos que o equilíbrio 0 é instável e o equilíbrio M é estável.

145: O que muda se tomarmos $a < 0$ e/ou $M < 0$? Mostre que, então, o equilíbrio M identifica um "limiar" a partir do qual uma população pode prosperar ou extinguir-se.

Há duas variações do modelo de Verhulst que incorporam caça predatória ou extração sustentável de recursos renováveis. Lembramos que essa equação já tem uma taxa de mortalidade intrínseca (βx^2, acima), então identificamos explicitamente um termo adicional:

146: Se a extração ocorrer a um número fixo de indivíduos por unidade de tempo, vem

$$\dot{x} = a(M - x)x - b$$

para alguma constante $b > 0$.

Determine e classifique os equilíbrios dessa equação. Mostre que um dos equilíbrios está entre 0 e M e, para esse valor $\widehat{x}$, determine b em termos dos coeficientes intrínsecos a, M. O que é necessário para que a extração seja sustentável a essa taxa?

147 Schaefer: Se a extração ocorrer com facilidade proporcional ao tamanho da população, ou seja, "quanto mais houver, mais fácil caçar", obtemos

$$\dot{x} = a(M - x)x - bx$$

onde novamente $b > 0$.

Determine e classifique seus equilíbrios. Qual valor de b permite caça renovável, sem alteração da população?

Em muitos casos, se o número de indivíduos estiver abaixo de um "limiar inferior" ainda positivo, então a reprodução e o crescimento são inviabilizados e a população extingue-se. Vejamos:

148: Suponha $M > L > 0$, onde L é o *limiar.* Mostre que o modelo

$$\dot{x} = a(M - x)(x - L),$$

com equilíbrios L, M, reduz-se à equação de Verhulst.

149 Volterra: Se acrescentarmos o redutor $x - L$, que corresponde à dificuldade de crescimento quando x é (maior que, mas) muito próximo de L, obtemos

$$\dot{x} = a(M - x)(x - L)x.$$

Determine e classifique os equilíbrios dessa equação e verifique o que ocorre quando $x_0 < L$. Resolva-a explicitamente e analise sua solução com as mesmas técnicas que usamos no estudo da equação de Verhulst.

Finalizamos esta seção com diversos problemas que têm o mesmo espírito do estudo de dinâmica populacional:

150: Um cometa esférico e homogêneo é vaporizado pelo calor solar. Ele perde massa proporcionalmente a sua exposição à radiação solar, ou seja, seu volume decresce em uma velocidade proporcional à área de sua superfície. Escreva e resolva a equação diferencial que rege o raio do cometa em função do tempo, com o PVI que associa R_0 ao raio na origem dos tempos.

151: Mostre que o mesmo modelo descreve a evaporação da água contida em uma taça cônica a uma temperatura constante.

2.3 Equações lineares

152: Uma equação de primeira ordem da forma

$$y' = p(x) \cdot y + q(x)$$

é chamada *linear.* Quando $q \equiv 0$, trata-se de uma equação *linear homogênea* que tem variáveis separáveis.

Comecemos imediatamente por um TEU. Sua demonstração é construtível, isto é, apresenta uma *fórmula* para a função procurada. Porém, não há necessidade de memorizá-la: aprecie o "método da variação das constantes" utilizado para deduzi-la e reproduza-o nos exercícios propostos.

153 TEU: Suponha que $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ são contínuas sobre um intervalo aberto I. Dados $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe única $y\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $y' = py + q$ e $y(x_0) = y_0$.

Solução: Inicialmente, considere a *parte homogênea* $y' = py$, cuja solução por separação de variáveis é

$$y(x) = y_0 \exp\bigl(\textstyle\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr).$$

Aqui e abaixo, usamos o TEU para (VS) com a hipótese de p contínua; essa expressão inclui a solução constante 0 (pondo-se $y_0 = 0$) e nenhuma outra solução se anula.

Neste momento, substituímos y_0 pelo símbolo C: agora, procuraremos soluções da equação completa, na forma

$$y(x) = C(x) \exp\bigl(\textstyle\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr);$$

este é o chamado *método da variação das constantes* em que supomos C função de x, isto é, "C varia com x". (Pospomos para o Capítulo 3, ponto 346, uma motivação e um contexto para essa idéia.)

Calculamos a derivada do produto:

$$y'(x) = C'(x) \exp\bigl(\textstyle\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr) + C(x) \exp\bigl(\textstyle\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr) p(x).$$

Também temos, por substituição,

$$p(x)y(x) + q(x) = p(x)C(x) \exp\bigl(\textstyle\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr) + q(x).$$

Assim, conhecemos os dois lados da equação $y' = py + q$. Cancelando-se os termos com p, sobra

$$q(x) = C'(x) \exp\bigl(\textstyle\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr),$$

cuja solução é

$$C(x) = C(x_0) + \textstyle\int_{x_0}^x q(r) \exp\bigl(-\textstyle\int_{x_0}^r p(s)\,ds\bigr)\,dr.$$

Retornando $C(x_0) = C = y_0$, obtemos a solução procurada

$$y(x) = y_0 \exp\bigl(\textstyle\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr) + \textstyle\int_{x_0}^x q(r) \exp\bigl(\textstyle\int_r^x p(s)\,ds\bigr)\,dr.$$

Para provarmos a unicidade, suponha que tenhamos soluções y_1, y_2 para o mesmo PVI. Observe que $y = y_1 - y_2$ satisfaz $y(x_0) = 0$ e $y' = py$. Como no início, $y(x) = y(x_0) \exp\bigl(\int_{x_0}^x p(s)\,ds\bigr)$ e substituindo $y(x_0) = 0$ informa $y = 0$, ou seja, $y_1 = y_2$.

154 Exemplo: $y' = 2x^{-1}y - 5$.

1º passo: A parte homogênea é $y' = 2x^{-1}y$, que pode ser resolvida por separação de variáveis:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C_1 \Rightarrow y = Cx^2.$$

2º passo: Fazemos a "variação da constante", ou seja, tomamos a função $y(x) = C(x) \cdot x^2$. Substituindo-a em $y' = 2x^{-1}y - 5$, obtemos

$$C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x = 2x^{-1} \cdot C(x) \cdot x^2 - 5.$$

Note que o somando $2xC(x)$ aparece em ambos os lados dessa igualdade. Após eliminá-lo, determinamos $C(x)$:

$$C'(x) \cdot x^2 = -5 \Rightarrow C'(x) = -5x^{-2} \Rightarrow C(x) = 5x^{-1} + K.$$

3º passo: Finalmente, concluímos que

$$y(x) = C(x) \cdot x^2 = 5x + Kx^2.$$

Verifique diretamente que $y = 5x + Kx^2$ é solução de $y' = 2x^{-1}y - 5$.

(Não temos referência para o próximo exemplo.)

155 Exemplo: $y' = (1 + \operatorname{sen} x)y + \cos x$, $y(\pi) = e$.
1º passo: Resolva primeiro apenas a parte homogênea $y' = (1+\operatorname{sen} x)y$, de variáveis separáveis, obtendo $y(x) = C \exp(x - \cos x)$.
2º passo: Escreva $y(x) = C(x) \exp(x - \cos x)$ e derive, substituindo na equação original:

$$\overbrace{C'(x)\exp(x - \cos x) + \underbrace{C(x)\exp(x - \cos x)(1 + \operatorname{sen} x)}_{\text{compare isto...}}}^{y'(x)} =$$

$$= \underbrace{\overbrace{(1 + \operatorname{sen} x)}^{p(x)}\overbrace{[C(x)\exp(x - \cos x)]}^{y(x)}}_{\text{...e isto}} + \overbrace{[\cos x]}^{q(x)}.$$

Cancelando, obtemos

$$C'(x)\exp(x - \cos x) = \cos x$$

e então

$$C(x) = \int_\pi^x \cos s \exp(\cos s - s)\, ds + K.$$

Essa é uma integral mais difícil que não é, agora, nossa preocupação; deixemo-la indicada. Note que utilizamos o ponto inicial π como limite inferior de integração, o que facilitará o último cálculo da resolução.
3º passo: Substitua $C(x)$:

$$y(x) = C(x)\exp(x - \cos x) =$$
$$= K\exp(x - \cos x) + \exp(x - \cos x)\int_\pi^x \cos s \exp(\cos s - s)\, ds.$$

Agora $y(\pi) = e$ implica $e = Ke^{\pi+1} + e^{\pi+1}0$, donde $K = e^{-\pi}$ e obtemos

$$y(x) = \exp(x - \pi - \cos x) + \exp(x - \cos x)\int_\pi^x \cos s \exp(\cos s - s)\, ds.$$

Resolva estas equações lineares:

156: $y' = y \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{sen} x$.

157: $y' = 2y + e^{3x}$.

158: $y' = x^{-1}y + x$.

159: $\dot{s} \operatorname{sen} t + s \cos t = 1$.

2.4 Equações exatas e fatores integrantes

160: Uma equação

$$p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = 0$$

(ou $p + qy' = 0$), com p, q definidas em uma região $U \subseteq \mathbb{R}^2$, é chamada *exata* se existir $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q \quad \text{em todo } U.$$

161 Note bem: Em alguns momentos, y é a variável com respeito à qual se toma uma derivada parcial; em outros, y é uma função de uma única variável x e tem sua derivada usual. Quando derivamos f quanto a x, tratamos apenas da derivada parcial quanto a essa variável, não quanto à parte implícita em y, *exceto em 164*, onde calcularemos a derivada total.

162: Suponha que p, q são de classe C^1 em U. Se $p\, dx + q\, dy = 0$ é exata com f como acima, então

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Se U é simplesmente conexo (como $\mathbb{R}^2$ e qualquer retângulo ou disco), então a identidade $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ é suficiente para exatidão, como se mostra no Cálculo de várias variáveis.

163: Portanto, caso verifiquemos que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

para uma equação qualquer, vale a pena procurarmos a função f (que pode existir ou não). Como veremos nos próximos exemplos, para determiná-la, calculamos $f = \int q\, dx$ ou $f = \int p\, dy$, tratando a outra variável como constante.

164: A equação $f(x, y) = K$ define soluções implícitas da equação exata, sendo f como acima, porque

$$p + qy' = \tfrac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0.$$

Note que, dada a condição inicial $y(x_0) = y_0$, temos $K = f(x_0, y_0)$.

165 Exemplo: $(3x^2 + 4xy)\,dx + (2y + 2x^2)\,dy = 0$, $y(1) = 0$.

Identificamos $p = 3x^2 + 4xy$ e $q = 2y + 2x^2$ e verificamos que $\frac{\partial p}{\partial y}$ e $\frac{\partial q}{\partial x}$ são iguais (ambos valem $4x$), então tentaremos encontrar f.

Já que $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, integramos

$$f = \int p\,dx = x^3 + 2x^2y + A(y).$$

Note que integramos p com respeito a x, então aparece uma constante de integração A, mas A é constante *apenas com relação a x*, podendo depender de y, de modo que escrevemos $A = A(y)$. Também poderíamos experimentar $f = \int q\,dy + B(x)$.

Agora utilizamos a outra condição: $\frac{\partial f}{\partial y} = q$ reescreve-se

$$2x^2 + A'(y) = 2y + 2x^2,$$

donde $A'(y) = 2y$ e então $A(y) = y^2 + C$. Assim, obtemos

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y + A(y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C.$$

Verificamos que, realmente, $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = q$; afinal, fizemo-lo para que funcionasse!

Fazendo $f = K$, obtemos $x^3 + 2x^2y + y^2 = D$, onde absorvemos as constantes. Com o ponto inicial $(1, 0)$, calculamos $D = 1$, de modo que

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = 1$$

e tem-se $y = -x^2 \pm \sqrt{x^4 - x^3 + 1}$ pela fórmula quadrática. Para determinar o sinal, conferimos novamente com o valor inicial $y(1) = 0$, satisfeito apenas por

$$y = -x^2 + \sqrt{x^4 - x^3 + 1}.$$

166 Exemplo: $(8x^3y + 3x^2y^2)\,dx + (2x^4 + 2x^3y)\,dy = 0$.

Temos $p = 8x^3y + 3x^2y^2$ e $q = 2x^4 + 2x^3y$, com $\frac{\partial p}{\partial y}$ e $\frac{\partial q}{\partial x}$ iguais (são $8x^3 + 6x^2y$). Integramos

$$f = \int p\,dx = 2x^4y + x^3y + A(y);$$

impomos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} = q \Rightarrow 2x^4 + x^3 + A'(y) &= 2x^4 + 2x^3y \Rightarrow\\ \Rightarrow A'(y) &= 2x^3y - x^3 \Rightarrow\\ \Rightarrow A(y) &= x^3y^2 - x^3y + C;\end{aligned}$$

obtemos

$$f(x, y) = 2x^4y + x^3y + A(y) = 2x^4y + x^3y^2 + C;$$

escrevemos $f = K$, ou seja,

$$2x^4y + x^3y^2 = D,$$

de onde resolvemos $y = -x \pm x^{-2}\sqrt{x^6 - Dx}$.

No próximo exemplo, escolhemos a integral de q quanto a y, que é mais simples:

167 Exemplo: $(x^2 + 1)y' = x^2 - 2xy$.

Temos $p = 2xy - x^2$ e $q = x^2 + 1$ com $\frac{\partial p}{\partial y}$ e $\frac{\partial q}{\partial x}$ iguais (são $2x$). Para achar f, fazemos

$$f = \int q\,dy = (x^2 + 1)y + B(x);$$

já que $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, obtemos

$$2xy - x^2 = 2xy + B'(x),$$

donde $B'(x) = -x^2$ e $B(x) = -x^3/3 + C$. Então

$$f(x, y) = (x^2 + 1)y - x^3/3 + C$$

e a solução é $y = (D + x^3)/3(x^2 + 1)$.

Verifique a condição necessária para exatidão e resolva pelo método exposto acima:

168: $y\,dx + x\,dy = 0$.

169: $y\cos x\,dx + \operatorname{sen} x\,dy = 0$.

170: $3e^{3x}y\,dx + e^{3x}\,dy = 0$.

171: $2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy = 0$.

172: $y' = 3x^{-1}y$.

173: $y' = -(y + 1)/(x + 1)$.

O método dos exemplos e exercícios pode ser aplicado sempre; demonstraremos um TEU de modo a ver como a solução é dada diretamente pelo Teorema da Função Implícita:

174 TEU: Sejam $p, q\colon R \to \mathbb{R}$ de classe C^1, onde R é o retângulo dado por $a < x < b$ e $c < y < d$, tais que $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Suponha ainda que q nunca se anule em R. Então por cada ponto $(x_0, y_0) \in R$ passa uma única solução de $p\,dx + q\,dy = 0$.

Solução: Como R é simplesmente conexo, então a equação é exata em R, ou seja, existe $f\colon R \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = q$. Veja que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = q(x_0, y_0) \neq 0$: pelo Teorema da Função Implícita, existe um intervalo I contendo x_0 e uma função $y\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y(x)) = f(x_0, y_0)$ para todo $x \in I$.

Já vimos que essa função deve ser solução de $p + qy' = 0$. Quanto ao valor inicial, temos $f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$; como $\frac{\partial f}{\partial y} = q$, contínua sem zeros, a função $f(x_0, \cdot)$ é estritamente monótona em y_0 e então $y(x_0) = y_0$.

Para demonstrar a unicidade, suponha que y_1, y_2 sejam soluções do mesmo PVI. Então $q(y_1 - y_2)' = 0$ subtraindo-se as equações. Porque q não se anula, temos $(y_1 - y_2)' = 0$ e então $y_1 - y_2$ é constante, ao longo de um intervalo, e igual a $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$.

Agora, passamos ao segundo tópico desta seção:

175: Diz-se que $\mu\colon U \to \mathbb{R}$ é *fator integrante* de $p\,dx + q\,dy = 0$ se

$$(\mu p)\,dx + (\mu q)\,dy = 0 \text{ for exata em } U.$$

Como multiplicar uma equação não a altera, qualquer solução dessa equação exata será solução da original.

176: Se μ é fator integrante, então

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu q)}{\partial x}.$$

O que se basta saber sobre U, μ, p, q para isso e para a recíproca?

177: Mostre que se

$$\varphi = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q}$$

só depende de x, então a equação admite um fator integrante μ que só depende de x e tem-se também que

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu\varphi.$$

Sugestão: Usando-se a regra de derivação do produto em 176, chega-se a uma equação diferencial *parcial* de μ.

178: No caso de φ e, portanto, μ dependerem apenas de x, resolvemos a equação de variáveis separáveis $\mu' = \mu\varphi$ obtendo uma fórmula explícita para o fator de integração: $\mu(x) = \exp\bigl(-\int \varphi(x)\,dx\bigr)$.

Escolha a primitiva (ou a constante de integração) mais simples; por que qualquer uma serve?

179: Analogamente, se

$$\theta = \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p}$$

depende apenas de y, um fator integrante μ pode ser obtido como solução de

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu\theta.$$

180 Exemplo: $(8xy + 3y^2)\,dx + (2x^2 + 2xy)\,dy = 0$, $y(2) = 1$.

Solução: Temos $p = 8xy + 3y^2$, donde $\frac{\partial p}{\partial y} = 8x + 6y$, e $q = 2x^2 + 2xy$, donde $\frac{\partial q}{\partial x} = 4x + 2y$; então a equação não é exata. Porém,

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} = \frac{8x + 6y - 4x - 2y}{2x^2 + 2xy} = \frac{2}{x}$$

e a equação tem um fator de integração μ que só depende de x. Para encontrá-lo, pomos

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \cdot \frac{2}{x},$$

donde $\mu(x) = Cx^2$ por separação de variáveis; escolhamos $C = 1$.

A nova equação é

$$(8x^3y + 3x^2y^2)\,dx + (2x^4 + 2x^3y)\,dy = 0$$

e é exata: nós a resolvemos em 166. Lá, determinamos $f(x, y) = 2x^4y + x^3y^2$ com $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = q$. Já que, no ponto inicial, $f(2, 1) = 40$ (ponto inicial), a solução é dada implicitamente por

$$2x^4y + x^3y^2 = 40;$$

resolvendo em y e escolhendo a solução que satisfaça $y(2) = 1$, obtemos $y(x) = -x + x^{-3}\sqrt{x^8 + 40x^3}$.

181: $(x^2 + y^2)\,dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\,dy = 0$.

Indicação: Com p, q correspondentes, verifique que essa equação não é exata, que

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q} = \frac{-3x^2 - 3y^2}{x^3 + 3xy^2 + 2xy}$$

depende de ambos x, y, mas que

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p} = 3$$

e isso independe de x, ou seja, apesar de constante, "depende apenas de y". Como solução de $\frac{d\mu}{dy} = 3\mu$, tome $\mu = e^{3y}$. Confirme que

$$e^{3y}(x^2 + y^2)\,dx + e^{3y}(x^3 + 3xy^2 + 2xy)\,dy = 0$$

é exata e resolva-a.

Determine um fator integrante e resolva:

182: $(3y^3 - x)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$.

183: $(3xy - 4y) + (2x^2 - 4x)y' = 0$.

184: $y \sec x\,dx + \operatorname{sen} x\,dy = 0$.

185: $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$.

186: $\dot{x} = (x^2 - 1)/tx$.

187: $(xy^2 + 5)\,dx + 3x^2 y\,dy = 0$.

188: $(x + y + 4) + (3x + 1)y' = 0$.

189: $y' = \frac{x+y+2}{x+1}$.

2.5 Substituições

Estudaremos, nesta seção, outras formas de equações que podem ser transformadas em, ou estudadas com, equações das formas básicas que já conhecemos. Note que mudaremos o significado de algumas letras.

Começamos com as equações "homogêneas" e apresentamos, a título de exemplo para as demais substituições, um estudo teórico de redução aos resultados obtidos para equações de variáveis separáveis.

190: Uma equação $y' = g(x, y)$ é *homogênea* se vale $g(ax, ay) = g(x, y)$ para qualquer $a \neq 0$.

Atenção: Conhecemos na Seção 2.3 as equações *lineares* homogêneas, que são bem diferentes. De fato, o adjetivo "homogêneo" costuma-se referir mais a elas do que a estas que vemos agora.

191: Mostre que toda equação homogênea pode ser reescrita na forma $y' = f(y/x)$ e reciprocamente.

Cuidado: O que acontece com $x = 0$?

192: Mostre que a substituição intuitiva $z = y/x$ transforma a equação $y' = f(y/x)$ na de variáveis separáveis $z' = x^{-1}(f(z) - z)$, onde $z(x)$ será a função incógnita.

193 Exemplo: $xyy' = x^2 - y^2$.

Se $x = 0$ ou $y = 0$, vemos que então ambos $x, y = 0$; isolemos y'.

Veja que

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{1 - (y/x)^2}{(y/x)}:$$

o primeiro quociente mostra que a equação dada é homogênea pela definição e o segundo, que coloca y' em função de y/x, pode ser obtido dividindo-se numerador e denominador por x^2.

Efetuamos a substituição indicada, seja $y = xz$ no primeiro quociente ou $y/x = z$ no segundo, e separamos as variáveis:

$$z + xz' = \frac{1 - z^2}{z} \Rightarrow xz' = \frac{1 - 2z^2}{z} \Rightarrow \frac{z\,dz}{1 - 2z^2} = dx.$$

Integramos e obtemos z:

$$-\tfrac{1}{4}\ln(1 - 2z^2) = x + C \Rightarrow z = \pm\tfrac{1}{2}(1 - ke^{-4x}).$$

Não nos esquecemos de determinar y:

$$y = xz = \pm\frac{x}{2}(1 - ke^{-4x}).$$

194 Exemplo: $y' + 1 = \sqrt{1 + y/x}$.

Essa equação quase já está na forma $y' = f(y/x)$ e requer $x \neq 0$, isto é, $x < 0$ ou $x > 0$.

Pondo $z = y/x$, obtemos $z + xz' + 1 = \sqrt{1 + z}$, ou seja,

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z} - (1 + z)} = \frac{dx}{x}.$$

Isso pode ser integrado com a substituição $u = \sqrt{1 + z}$ (ou $z = u^2 - 1$), resultando em

$$-2\ln|1 - u| = \ln|x| + C_0,$$

donde

$$u = 1 - \frac{K}{\sqrt{|x|}},$$

$$z = \frac{K^2}{|x|} - \frac{2K}{\sqrt{|x|}}$$

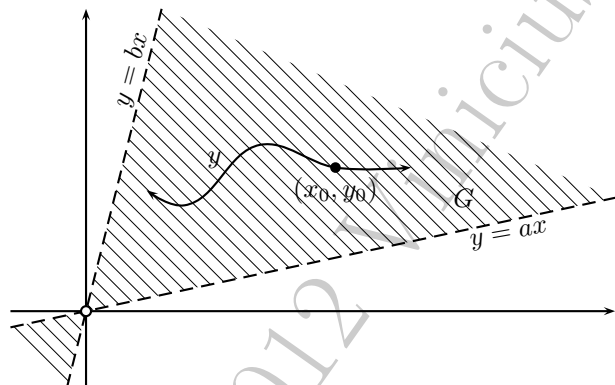
$$\text{e } y = \begin{cases} K^2 - 2K\sqrt{x} & \text{se } x > 0, \\ -K^2 + 2K\sqrt{-x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Relembre no ponto 69 como concluir essa resolução quando $x > 0$. No caso $x < 0$, vem analogamente $y(x) = -C - 2\sqrt{-Cx}$ para $x < 0$ ou $y(x) = C + 2\sqrt{Cx}$ para $x \leqslant C$.

Mostre que estas equações são homogêneas e resolva-as:

195: $xyy' = x^2 + y^2$.

196: $y' + 1 = -\sqrt{1 + y/x}$.

197: Suponhamos f definida em $]a, b[$. Então a função $f(y/x)$ está definida entre as retas $y = ax$ e $y = bx$. Esse domínio G deverá conter o gráfico de qualquer solução de $y' = f(y/x)$:

198: Deduza um TEU específico a partir daquele de separação de variáveis: Suponha que $(x_0, y_0) \in G$ e que f é contínua com $f(u) \neq u$ para todo $u \in]a, b[$; então existe uma única solução de $y' = f(y/x)$ com gráfico em G passando por esse ponto.

Eis outras substituições interessantes:

199: Considere a equação $y' = f(ax + by)$ com a, b constantes reais. Mostre que a substituição intuitiva $z = ax + by$ transforma essa equação na autônoma $z' = a + bf(z)$.

Resolva estas equações por esse método:

200: $y' = (\operatorname{sen}(4x - 2y))^{-1} + 2$.

Solução: Com $z = 4x - 2y$ temos

$$z' = 4 - 2y' = 4 - 2[(\operatorname{sen} z)^{-1} + 2] = (\operatorname{sen} z)^{-1},$$

donde $\operatorname{sen} z \, dz = -2\, dx$. Então $-\cos z = -2x + C$ e concluímos que

$$y = \frac{4x - z}{2} = 2x - \tfrac{1}{2} \arccos(2x - C).$$

201: $y' = 2 + (3x - 5y)^2$.

202 Bernoulli: Dada a equação

$$y' = f(x)y + g(x)y^k,$$

onde $k \neq 1$ e as funções f, g são contínuas, mostre que a substituição $z = y^{1-k}$ transforma-a na equação linear

$$z' = (1 - k)f(x)z + (1 - k)g(x).$$

Isso foi observado por Leibniz.

Resolva as seguintes equações, servindo-se da observação de Leibniz:

203: $y' = ay - by^2$ (essa é uma forma da equação de Verhulst que já resolvemos por separação de variáveis).

Indicação: Temos $k = 2$ e obtemos $z' = -az + b$, que é linear (mas, como a, b são constantes, também é autônoma). Após os cálculos devidos para sua solução, obtemos

$$y = z^{-1} = \frac{a}{b - Ce^{-ax}}.$$

204: $y' = x^{-1}y + y^3$.

205: $y' = xy + 2y^\pi$.

206 Riccati: Suponha que y_p é uma solução particular já conhecida de

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2,$$

por exemplo, se $f = 0$ então $y_\mathrm{p} = 0$. Mostre que a substituição $y = y_\mathrm{p} + z^{-1}$ transforma-a na equação linear

$$z' = [-g(x) - 2y_\mathrm{p}(x)h(x)]z - h(x).$$

207 Ortogonalidade: Suponha dada uma equação de primeira ordem na forma geral

$$F(x, y, y') = 0.$$

Cada solução dessa equação descreve, com seu gráfico, uma curva no plano; assumindo um TEU, essas curvas são todas paralelas e particionam o plano. Forme agora a equação

$$F(x, y, -1/y') = 0$$

(para a mesma F), ou seja, simplesmente substitua cada ocorrência de y' literalmente por $-1/y'$. As curvas descritas por essa equação, sob certas condições, também foliam o plano.

Mostre que essas duas famílias de curvas são *ortogonais,* isto é, qualquer curva da primeira família e qualquer curva da segunda família, nos pontos onde se encontrarem, têm tangentes perpendiculares. Por exemplo, as linhas de força de um campo elétrico e as linhas equipotenciais, em um plano contendo cargas dispersas, devem ser ortogonais.

O procedimento de substituir y' por $-1/y'$ é chamado *determinação das trajetórias ortogonais.*

Finalmente, apresentamos um método de substituição intuitivamente óbvio quando um problema pode ser melhor formulado, entendido ou resolvido em outro sistema de coordenadas:

208: Dadas as fórmulas usuais para coordenadas polares versus retangulares,

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$
$$\theta = \mathrm{arctg}(y/x),\ r = \sqrt{x^2+y^2},$$

compute

$$dx = \cos\theta\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta,\ dy = \mathrm{sen}\,\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta$$
$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}},\ dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Indicação: Pela Regra da Cadeia, por exemplo, $dx = \frac{\partial x}{\partial r}\,dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}\,d\theta$.

209: Converter a equação $y' = f(x,y)$, de que se buscam soluções $y(x)$, para coordenadas polares significa escrever

$$\frac{\mathrm{sen}\,\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta} = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

por substituição, em que se buscam soluções $r(\theta)$. (Podemos sempre simplificar $|r| = r$: por quê?)

210 Exemplo: ([Dem]) $(x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$.

Por substuição, temos

$$r^2[\cos\theta\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta] - r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta[\mathrm{sen}\,\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta] = 0.$$

Isso se simplifica como

$$r^2\cos^3\theta\,dr - r^3\,\mathrm{sen}\,\theta(1+\cos^2\theta)\,d\theta = 0,$$

que é de variáves separáveis:

$$\frac{dr}{r} = \mathrm{sen}\,\theta\Big(\frac{1}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\Big)\,d\theta.$$

Sua solução é $r(\theta) = C\exp(1/2\cos^2\theta)/|\cos\theta|$ com $C > 0$. Para voltar às coordenadas retangulares, substituímos algumas expressões:

$$r = C\exp\big(\tfrac{1}{2}(\mathrm{tg}^2\,\theta + 1)\big)\cdot\frac{r}{|x|},$$

donde

$$\ln|x| = K_1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{y^2}{x^2} + 1\Big) = K_2 + \frac{y^2}{2x^2}.$$

Assim, a solução é $y = \pm\sqrt{2x^2(\ln|x| + K)}$.

2.6 Outros assuntos

Nesta seção, damos destaque a aplicações, problemas e exercícios que envolvem equações de primeira ordem; aqui os agrupamos por assunto, sem os dispersar nas diversas seções de métodos de resolução. Também conheceremos alguns métodos numéricos e gráficos para aproximação ou esboço de soluções quando sua resolução formal é difícil.

Relembramos que, em Física, as constantes de proporção (como a de Avogrado ou a de Planck, sejam adimensionais ou não) são sempre positivas e a multiplicação por -1, quando ocorre, sempre é indicada explicitamente com o sinal negativo.

211 Esfriamento: Newton formulou a seguinte lei sobre o esfriamento natural de um corpo previamente aquecido: A variação da temperatura do corpo é proporcional à diferença entre essa temperatura e a do ambiente; seja α o valor absoluto dessa constante de proporcionalidade.

Com atenção aos sinais, determine a equação diferencial que rege a temperatura T do corpo, em função do tempo t, sendo a temperatura do ambiente igual a $A(t)$.

212: Suponha que a situação descrita tenha início em $t = 0$, com $T(0) = T_0$ (PVI). Note que, portanto, a equação e suas soluções somente são válidas para $t \geqslant 0$. O corpo, no "passado" $t < 0$, não esquenta indefinidamente porque nem a equação tem validade, nem a situação era a mesma, nem a lei de esfriamento aplica-se.

213: Suponha agora que o corpo é originalmente mais frio que o ambiente e, então, que ele se aquece gradualmente; assuma uma lei análoga à do esfriamento, com a mesma constante de proporcionalidade. Mostre que a mesma equação vale também para esta segunda situação, estudando os sinais de ambos os lados.

Desse modo, a equação é válida qualquer que seja a comparação entre T e A ou mesmo caso seus gráficos se cruzem.

214: Identifique a forma dessa equação e resolva o PVI $T(0) = T_0$.

215: Simplifique a solução sob a hipótese de A ser constante (por exemplo, em um frigorífico) e observe que a convergência $T(t) \to A$ é exponencialmente rápida, mas somente se dá com $t \to \infty$, isto é, o equilíbrio térmico nunca é atingido em tempo finito ou, *aproximadamente,* só ocorre após certo tempo.

216: A lei de Newton é geralmente formulada apenas para A constante. Anteriormente, extrapolamos sua validade usando a equação diferencial para representar somente uma "fotografia" da dinâmica envolvida: a derivada é uma velocidade instantânea, não média. Porém, a adequação dessa extrapolação à realidade, ou seja, a confirmação dessa teoria, requer experimentação em ambientes de temperatura variável!

217: Suponha que dois corpos, com temperaturas $T_1(t), T_2(t)$, são colocados em contato, formando um sistema termicamente isolado, no instante $t = 0$; sejam T_{10}, T_{20} os valores iniciais. Podemos prosseguir com a extrapolação, assim, supondo que cada corpo atua como "ambiente" para o outro. Escreva as duas equações diferenciais que regem T_1 e T_2, assuma o mesmo valor de α para ambas as equações e mostre que

(a) a soma $T_1 + T_2$ é constante com valor $T_{10} + T_{20}$;

(b) não há mudança de temperatura (ou seja, as variações são zero) precisamente quando $T_1 = T_2$;

(c) essa temperatura de equilíbrio vale $\frac{1}{2}(T_{10} + T_{20})$.

218: Refaça o ponto anterior usando constantes diferentes α_1, α_2 para as equações e mostrando que $\alpha_2 T_1 + \alpha_1 T_2$ é constante. Qual é a temperatura de equilíbrio?

Mostre ainda que se m_1, c_1 são a massa e o calor específico do corpo de temperatura T_1 e, analogamente, m_2, c_2 referem-se a T_2, então devemos tomar $\alpha_2 = m_1 c_1$ e $\alpha_1 = m_2 c_2$.

219 Permeabilidade: Assumiremos esta lei: A quantidade de radiação absorvida ao passar por uma lâmina fina de chumbo é proporcional à quantidade de radiação incidente e à espessura da lâmina.

As razões que levam a essa formulação são as seguintes: Se cada partícula radioativa tiver uma probabilidade independente ε de ser absorvida, então a absorvição é proporcional à incidência. Porém, ε é muito pequena para uma lâmina fina, porque as partículas têm grande energia. Se supusermos uma segunda lâmina idêntica atrás da primeira, a proporção das partículas que incidem sobre essa segunda lâmina é $1 - \varepsilon$ e a daquelas que a atravessam é, novamente, $1 - \varepsilon$ desse número, ou seja,

$$(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon) = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

das partículas originais. Como ε^2 é muitíssimo pequeno, podemos desprezá-lo: ao dobrar a espessura da lâmina fina, simplesmente dobramos a probabilidade de absorção.

A mesma lei descreve diversos fenômenos de permeabilidade.

220: Em termos formais, a quantidade de radiação absorvida é $\alpha I h$, onde α é uma constante positiva de proporção, I mede a incidência radioativa e h é a espessura *fina* da lâmina de chumbo.

221: Se metade das partículas radioativas incidentes são absorvidas por uma certa chapa padronizada, quanto de radiação atravessará uma barreira com três vezes sua espessura?

Veja: Não faça uma simples regra de três, porque as chapas consideradas não são lâminas finas! De fato, a barreira não poderá absorver 150% das partículas incidentes. . .

Sugestão: Divida a barreira em três chapas idênticas à padronizada e use a fração que atravessa cada chapa como total incidente para a próxima chapa.

222: Esse método sugerido permite responder a mesma pergunta para uma barreira de espessura qualquer?

223: Para uma barreira de chumbo de espessura arbitrária, seja $I(x)$ a quantidade de radiação que atravessa essa chapa até a profundidade x. (Pomos $I(0) = I_0$, que é o total incidente.) Então, para h pequeno, a quantidade que chega a $x + h$ é aquela $I(x)$ menos a quantidade absorvida na região entre x e $x + h$, que corresponde a uma lâmina fina.

Deduza a equação diferencial da permeabilidade e resolva-a; verifique sua concordância com o cálculo em 221.

Nos próximos pontos, estudaremos alguns circuitos elétricos simples, formando e resolvendo equações diferenciais que regem a corrente elétrica nesses circuitos. Embora tentemos motivar algumas dessas equações, não daremos ênfase nem às leis físicas subjacentes, nem à análise física posterior — como o cálculo da potência desenvolvida ou da energia dissipada pelo efeito Joule, ambos muito curiosos —, porque esses estudos cabem melhor em um texto especializado como [Tip].

224 RC: Este circuito liga, em série, uma chave interruptora, um resistor com resistência R e um capacitor de capacitância C, ambas R, C constantes positivas. Quando o circuito fechar, a corrente elétrica sempre satisfará $I = U/R = Q/RC$: é a carga Q armazenada no capacitor ($\pm Q$ em cada lado) que gera a diferença de potencial U no circuito. Suponha que, no instante $t = 0$, tenhamos $Q(0) = Q_0$ e então a chave seja fechada: a corrente inicial é $I_0 = Q_0/RC$ e, conforme t aumenta, o capacitor descarrega-se e Q diminui. Como corrente significa carga deslocada por unidade de tempo, temos $I = -\dot{Q}$, onde o sinal indica a diminuição de Q.

Assim,

$$\dot{Q} = -Q/RC,\ Q(0) = Q_0.$$

Resolva esse PVI, obtendo a carga e (por derivação) a corrente como funções do tempo. Graficamente, como se comporta a descarga do capacitor?

225: Suponha agora que o capacitor esteja descarregado ($Q_0 = 0$) e que se insira nesse circuito, em série, uma fonte de força eletromotriz, que origina uma diferença de potencial constante E. Assim, o circuito formado é de *corrente contínua* quando se fecha a chave em $t = 0$ e inicia-se a carga do capacitor. Agora, $I = \dot{Q}$ e $E = U_R + U_C = RI + Q/C$, de modo que

$$\dot{Q} = E/R - Q/RC.$$

Resolva o PVI dessa equação com $Q(0) = 0$, determinando a carga e a corrente como funções do tempo e traçando seus gráficos. Qual é a corrente inicial?

226: Suponha que o capacitor esteja carregado, ou seja, $Q_0 \neq 0$: o sinal de Q_0 depende da polaridade da conexão; conforme for positivo ou negativo, a carga aumentará sempre ou primeiro diminuirá (em valor absoluto), para anular-se, e então crescerá com polaridade oposta.

Resolva esse novo PVI e determine graficamente o comportamento das soluções dependendo do sinal de Q_0.

227: Qual será a carga completa do capacitor? Em quanto tempo obteremos 90% dessa carga?

228: Estude o circuito RC com uma fonte de força eletromotriz alternada, isto é, que origina a diferença de potencial $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$:

$$R\dot{Q} + Q/C = E_0 \cos(\omega_0 t).$$

229 LR: Ligamos, também em série, uma chave interruptora, uma fonte de força eletromotriz E, um resistor com resistência R e um indutor de indutância L, todas E, R, L constantes positivas.

O indutor é uma espira ou solenóide que, sob a passagem de corrente elétrica, gera um campo magnético. Se a corrente variar, a variação correspondente do campo opõe-se à variação da corrente, gerando uma força contra-eletromotriz $L\dot{I}$. (Se I cresce, então o indutor atua como um resistor e a queda de potencial é $L\dot{I} > 0$; se I diminui, então o indutor atua como um gerador e a "queda" é $L\dot{I} < 0$.)

Então $E = U_R + U_L = RI + L\dot{I}$. Resolva o PVI

$$L\dot{I} + RI = E,\ I(0) = 0,$$

determinando a corrente em função do tempo.

230: Determine o valor de equilíbrio I_{final} da corrente no circuito, quando a força contra-eletromotriz é nula. Essa é a corrente final do circuito.

231: Estude o circuito LR com fonte de força eletromotriz alternada:

$$L\dot{I} + RI = E_0 \cos(\omega_0 t).$$

Retornaremos a esse tópico na Seção 3.7, a respeito dos circuitos LC e LCR, quando pudermos estudar as equações de segunda ordem pertinentes.

57: $A = 3$, $B = -3/2$. **72:** $y = y'x$: substitua $y' = C$. **73:** $y' = 8$. **74:** $y'' = 0$. **75:** $y''' = 0$. **76:** $y' = 2y/x$: multiplique $y' = 2Cx$ por x e substitua y. **77:** $y' = 3y$. **78:** $y'' = -25y$. **79:** $y' = -x/y$. **83:** Derive uma vez, substitua $2e^{xy}$ por x e derive novamente. **88:** Para o Teorema da Inversa, tome $f(x) = x^2$: vem $f'(0) = 0$; por menor que seja U, não há bijeção. **94:** Sol.: $y = \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2}$. **95:** $y = C \operatorname{sen} x$. **96:** $y = C/x$. **97:** $y = \pm\sqrt{2\ln|x| - x^2 + C}$. **98:** $y = \ln|e^x + C|$. **99:** $y = \pm\sqrt{C/(x^2+1) - 1}$. **100:** $y = \ln|1 - C/e^x|$. **101:** $y = (Cx-1)/(x+1)$. **102:** $y = \operatorname{tg}(\ln|x| + C)$. **103:** $y = 8/x$. **104:** $y = 0$. **105:** $y = (7x-1)/(x+1)$. **106:** $y = x$. **107:** $y = (x\ln x - x + 2)^2$. **108:** $y = (x+1)/\sqrt{2+2x^2}$. **115:** $g(y) = y^{-1}$ definida em $]-\infty, 0[$ e $]0, \infty[$, onde nunca se anula; então o TEU aplica-se em cada intervalo. Sol.: $y = \pm\sqrt{x_2^2 + y_0^2 - x^2}$. **116:** $g(y) = y^2$ definida em $\mathbb{R}$; não se anula em $]-\infty, 0[$ e $]0, \infty[$, onde se aplica o TEU; sol. regulares $y = -(x^2 - x_0^2 - y_0^{-1})^{-1}$ não incluem sol. singular $y = y_0 = 0$ e nunca a interceptam (porque nunca se anulam). Isso prova um TEU geral. (Note: a forma $y = y_0/(1 - y_0x^2)$ inclui todas as soluções.) **117:** $g(y) = y$ definida em $\mathbb{R}$; não se anula em $]-\infty, 0[$ e $]0, \infty[$, onde se aplica o TEU; soluções regulares $y = xy_0/x_0$ incluem sol. singular $y = y_0 = 0$ e nunca a interceptam quando $y_0 \neq 0$ (porque $x \neq 0$). Isso prova um TEU geral (mas para $x < 0$ ou $x > 0$). **118:** $g(y) = 1 + y^2$ definida em $\mathbb{R}$ e nunca se anula; o TEU aplica-se sempre. Sol. $y = (y_0 + \operatorname{tg}(x - x_0))/(1 - y_0 \operatorname{tg}(x - x_0))$. **119:** $g(y) = y^{2/3}$ definida em $\mathbb{R}$; não se anula em $]-\infty, 0[$ e $]0, \infty[$, onde se aplica o TEU; sol. regulares $y = y_0^{1/3} + (x - x_0)^3$ não incluem sol. singular $y = y_0 = 0$, mas a interceptam em $x = x_0$, de modo que não há um TEU geral. Note ainda: as sol. podem bifurcar, como $y = 0$ e $y = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 1, \\ (x-1)^3 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ ou confluir. **120:** $g(y) = 1$ definida em $\mathbb{R}$ e nunca se anula; o TEU aplica-se sempre (mas para $x < 0$ ou $x > 0$). Sol. $y = y_0 + x_0^{-1} - x^{-1}$. **123:** Se y_1 satisfaz $y' = g(y)$ e $y(0) = y_0$, então $y_2(x) = y_1(x - x_0)$ satisfaz $y' = g(y)$ e $y(x_0) = y_0$. **128:** 0 instável e 1 estável. **130:** 2 semiestável. **132:** Use o TEU e 123. **135:** $x = (x_0^{-1} - at)^{-1}$. **138:** Dica: obtenha $(x - M)x^{-1} = 1 - Mx^{-1}$ e isole esse x. **139:** Dica: como $\exp(-Mat) > 0$, o denominador é sempre $> x_0 > 0$, donde $0 < x < M$. **146:** É preciso, primeiramente, trazer a população a $\widehat{x}$, aguardando seu crescimento sem extração caso $x_0 < \widehat{x}$. **147:** Imponha $\dot{x} = 0$. **148:** Basta estudar o "saldo viabilizante" $y = x - L$, donde $\dot{y} = a(M - L - y)y$. **150:** $r(t) = R_0 - kt$. **156:** $y = (K - \cos 2x)/\cos x$. **157:** $y = e^{3x} + Ke^{2x}$. **158:** $y = Kx + x^2$. **159:** $s = (t + K)/\operatorname{sen} t$. **169:** $y = k/\operatorname{sen} x$. **171:** $y = \pm kx$. **172:** $y = Cx^3$. **173:** $y = (C - x)/(x + 1)$. **182:** Fator x^2; sol.: $y = [(x^4 - K)/4x^3]^{1/3}$. **183:** Fator $K|4 - 2x|^{-1/2}$: simplifique com $K = \sqrt{2}$ e escreva-o $|x - 2|^{-1/2}$. Integre $\partial f/\partial y = q$ "novo". Sol.: $y = C/x\sqrt{|x-2|}$. **184:** Fator $\sec x$; sol.:

$y = C/\operatorname{tg} x$. **185:** Fator x^{-4}; sol.: $y = \pm\sqrt{x^2 - Cx^3}$. **186:** Fator t^{-3}; sol.: $x = \pm\sqrt{1 - 2Ct^2}$. **187:** Fator $x^{-4/3}$. **188:** Fator $(3x+1)^{-2/3}$. **189:** Fator $(x+1)^{-2}$; sol.: $y = (x+1)(\ln|x+1| - C) - 1$. **191:** Dada g, tome $f(s) = g(1, s)$ e use $a = x^{-1}$; dada f, tome $g(x, y) = f(y/x)$. **192:** Derive $y = xz$ e iguale a $f(z)$. **195:** $y = \pm x\sqrt{2\ln x + C}$. **196:** Analog. a 194, $y = C - 2\sqrt{Cx}$ para $0 < x < C$ e $y = -C + 2\sqrt{-Cx}$ se $-C < x < 0$. **201:** $y = 3x/5 - \sqrt{7}\operatorname{tg}(-x\sqrt{35} + C)/5\sqrt{5}$. **202:** Calcule z' e isole y'; substitua y^k por y/z e multiplique toda a equação por z/y. **204:** $y = (C/x^2 - 2x/3)^{-1/2}$. **205:** $y = [C\exp(x(1-\pi)) - 2x - 2/(1-\pi)]^{1/(\pi-1)}$. **211:** $\dot{T} = -\alpha(T - A)$. **214:** Linear: por variação da constante, $T(t) = e^{-\alpha t}T_0 + e^{-\alpha t}\int_0^t \alpha e^{\alpha s}A(s)\,ds$. **215:** $T(t) = A + e^{-\alpha t}(T_0 - A)$. **218:** A energia térmica do sistema $m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2$ é constante. **221:** Um oitavo. **223:** Temos $I(x+h) = I(x) - \alpha I(x)h$. Divida por h e tome $h \to 0$: $I' = -\alpha I$. Solução: $I(x) = I_0e^{-\alpha x}$. Assumindo $I(1) = I_0/2$, vem $\alpha = \ln 2$ e $I(3) = I_0/8$. **224:** $Q(t) = Q_0\exp(-t/RC)$ e $I(t) = I_0\exp(-t/RC)$. **225:** $Q(t) = EC(1 - \exp(-t/RC))$ e $I(t) = E\exp(-t/RC)/R$. **226:** $Q(t) = EC - (EC - Q_0)\exp(-t/RC)$ e $I(t) = (EC - Q_0)\exp(-t/RC)/RC$. **229:** $I(t) = E(1 - \exp(-Rt/L))/R$. **230:** $I_{\text{final}} = E/R$. **260:** O PVI de segunda ordem especifica os valores da solução e de sua derivada em um ponto. Se duas soluções têm o mesmo valor em um ponto, deverão ter derivadas distintas aí. **271:** L.D.: $1(0) + 0(5x) + 0(-2x^3) = 0$. **272:** L.D.: $3(2\operatorname{sen}(x^2-1)) + 2(-3\operatorname{sen}(x^2-1)) = 0$. **273:** L.I. **274:** L.D.: $x = \frac{4}{9}(x+5) + \frac{5}{9}(x-4)$. **275:** L.I. **276:** L.I. **277:** L.I. **278:** L.I. **279:** L.I. **280:** L.I. **283:** Suponha L.D.: uma das funções escreve-se como combinação linear das demais. Então também uma coluna da matriz é combinação linear das demais e o determinante anula-se. **317:** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **318:** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. **319:** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$. **320:** $y = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x$. **321:** $y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\operatorname{sen} x$. **322:** $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. **323:** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$. **324:** $y = C_1e^x\cos 2x + c_2e^x\operatorname{sen} 2x$. **325:** $y = C_1e^x\cos\sqrt{3}x + C_2e^x\operatorname{sen}\sqrt{3}x$. **326:** $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$. **327:** $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x}$. **328:** Note $P(1) = 0$ e fatore. Sol.: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$. **329:** Note -1 raiz simples: fatore. Sol. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + C_3e^{x/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x/2)$. **330:** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$. **331:** $y = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2xe^{\sqrt{3}x} + C_3e^{-\sqrt{3}x} + C_4xe^{-\sqrt{3}x}$. **332:** $y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x + C_3x\cos\sqrt{3}x + C_4x\operatorname{sen}\sqrt{3}x$. **333:** $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$. **334:** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{2}x} + C_4e^{-\sqrt{2}x}$. **335:** $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\operatorname{sen} x + C_4x\cos x + C_5x\operatorname{sen} x$. **336:** Mostre $P(\lambda) = (\lambda+1)^n$. Sol. $y = \sum_{i=0}^{n-1} C_{i+1}x^ie^{-x}$. **338:** $y = -4e^x + 2e^{4x}$. **339:** $y = 5e^{2x} - 10xe^{2x}$. **340:** $y = 3\cos 2x$. **341:** $y = 0$. **342:** $y = -e^{2x}\cos x$. **343:** $y = -\frac{1}{2}e^x - xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$. **350:** $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{-5x}/42$.

BASICÃO DE EDO

Vinicius Cifú Lopes

Versão Preliminar

Capítulo 3

Ordens superiores

Uma mesma teoria dará conta das equações de segunda, terceira e outras ordens, embora seja um pouco distinta do corpo de conhecimento que já desenvolvemos para a primeira ordem e refira-se a uma forma mais restrita de equações. Poderemos, também, esclarecer alguns dos métodos que já vimos e que podiam parecer "mágicos", como a variação de constantes.

Precisamos enunciar dois resultados para iniciar nosso estudo:

260 TEU: Sejam $f(x, y_0, y_1 \ldots, y_{n-1})$ e suas derivadas $\frac{\partial f}{\partial y_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$ contínuas em uma vizinhança de um ponto $(x_0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Então existe $\delta > 0$ e existe uma única função $y\colon\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \to \mathbb{R}$ que é solução do PVI na forma normal

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big),$$
$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

261 Superposição: Suponha que y_r e y_s são soluções, respectivamente, das equações lineares $\sum_{i=0}^{n} p_i y^{(i)} = r$ e $\sum_{i=0}^{n} p_i y^{(i)} = s$ onde $p_0, \ldots, p_n, r, s$ são funções apenas da variável independente x. Mostre que $y_r \pm y_s$ é solução de $\sum_{i=0}^{n} p_i y^{(i)} = r \pm s$.

É também importante reforçar as diferenças de interpretação em relação à teoria de primeira ordem:

262: Nas condições do TEU, os gráficos de duas soluções da mesma equação de segunda ordem podem cruzar-se, mas não podem ser tangentes. Por quê?

3.1 Dependência linear de funções

Faremos bom uso dos conceitos de dependência e independência linear de funções, de modo que já os apresentamos aqui. A linguagem teórica adequada para a formulação do que aprenderemos é aquela básica de Álgebra Linear sobre espaços de funções, como em [CoLo]; não há necessidade, porém, de aprendê-la antecipadamente.

Suponha que $f_1, \ldots, f_n$ são funções sobre o mesmo domínio X e com valores reais:

263: Diz-se que $f_1, \ldots, f_n$ são *linearmente independentes* caso

$$(\forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}) \left\{ \left[(\forall x \in X) \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \right] \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0 \right\},$$

isto é, a única possibilidade de termos $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0$ é a trivial.

264: Diz-se que $f_1, \ldots, f_n$ são *linearmente dependentes* caso

$$(\exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}) \left\{ \left[(\forall x \in X) \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = 0 \right] \text{ e algum } c_i \neq 0 \right\},$$

isto é, existe um modo não-trivial de termos $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0$.

265: As funções $f_1, \ldots, f_n$ são linearmente dependentes se e somente se pelo menos uma delas escreve-se como combinação linear das demais. (Este é o tradicional "divida pelo coeficiente não-nulo e passe para o outro lado".)

266 Exemplo: As funções x e $\cos x$ são linearmente independentes.

Para mostrá-lo, suponhamos que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são tais que

$$c_1(x) + c_2(\cos x) = 0$$

para qualquer valor de x. Em particular, com $x = 0$ ou $x = \pi/2$ obtemos, respectivamente,

$$0c_1 + 1c_2 = 0, \ (\pi/2)c_1 + 0c_2 = 0.$$

Esse é um sistema de equações com incógnitas c_1, c_2 cuja única solução é $(0, 0)$. Portanto, pela definição, $\{x, \cos x\}$ é um conjunto linearmente independente.

Note: Foi preciso encontrar valores de x, em número igual ao das funções apresentadas, de modo que se obtivesse um sistema com única solução $(0, 0)$, nesse caso em que as funções são linearmente independentes. Não há receita para encontrar tais valores, além de explorar os zeros das funções. Caso as funções fossem linearmente dependentes, o sistema teria uma

solução não-trivial, mas seria preciso verificar que a combinação linear correspondente sempre se anula para qualquer valor de x. (Quando tratarmos do "wronskiano", apresentaremos um cálculo simples para decidir sobre a dependência linear de funções, que lamentamos que não seja ensinado nos cursos elementares de Álgebra Linear.)

267 Exemplo: As funções 5 (constante), $6 \operatorname{sen}^2 x$ e $2 \cos^2 x$ são linearmente dependentes.

Para tanto, devemos procurar escalares c_1, c_2, c_3, não todos nulos, tais que

$$c_1(5) + c_2(6 \operatorname{sen}^2 x) + c_3(2 \cos^2 x) = 0$$

para qualquer valor de x. Tomando $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$, obtemos o sistema

$$5c_1 + 2c_3 = 0, \ 5c_1 + 6c_2 = 0, \ 5c_1 + 3c_2 + c_3 = 0,$$

que é indeterminado; uma possível solução é dada por $c_1 = 6$, $c_2 = -5$ e $c_3 = -15$. Agora, verificamos que *realmente*

$$6(5) - 5(6 \operatorname{sen}^2 x) - 15(2 \cos^2 x) = 0$$

para qualquer x, o que conclui o raciocínio. Também podemos, a partir dessa equação, determinar uma função como combinação linear das demais, por exemplo,

$$(6 \operatorname{sen}^2 x) = \tfrac{6}{5}(5) - 3(2 \cos^2 x).$$

Decida se cada conjunto de funções é linearmente dependente ou não:

268: 0, $5x$ e $-2x^3$.

269: $2 \operatorname{sen}(x^2 - 1)$ e $-3 \operatorname{sen}(x^2 - 1)$.

270: $x - 4$ e $x + 5$.

271: $x - 4$, x e $x + 5$.

272: x e x^2.

273: x e e^x.

274: e^x e e^{2x}.

275: $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

276: x e $\operatorname{sen} x$.

277: x, e^x e $\operatorname{sen} x$.

O resultado a seguir é o mais importante em nosso estudo. Muito mais que saber demonstrá-lo, é importante entendê-lo:

278: Considere estas funções:

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots,\ x^{k_1} e^{\lambda_1 x},$$
$$\vdots$$
$$e^{\lambda_m x},\ xe^{\lambda_m x}, \ldots,\ x^{k_m} e^{\lambda_m x},$$
$$e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x),\ xe^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), \ldots,\ x^{l_1} e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x),$$
$$e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}(\beta_1 x),\ xe^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}(\beta_1 x), \ldots,\ x^{l_1} e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}(\beta_1 x),$$
$$\vdots$$
$$e^{\alpha_n x}\cos(\beta_n x),\ xe^{\alpha_n x}\cos(\beta_n x), \ldots,\ x^{l_n} e^{\alpha_n x}\cos(\beta_n x),$$
$$e^{\alpha_n x}\operatorname{sen}(\beta_n x),\ xe^{\alpha_n x}\operatorname{sen}(\beta_n x), \ldots,\ x^{l_n} e^{\alpha_n x}\operatorname{sen}(\beta_n x).$$

Assuma que $k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_n$ são números naturais, que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são reais distintos e que $\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_n + \beta_n i$ são complexos distintos e não conjugados, sendo $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Sob tais condições, o conjunto dessas funções é linearmente independente.

Precisaremos de mais estas definições, para as quais suponha fixadas as funções $f_1, \ldots, f_n \colon X \to \mathbb{R}$:

279: Se $c_1, \ldots, c_n$ são números reais, então podemos formar a função

$$g = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n;$$

diz-se que as funções originais *geram (linearmente)* g ou que g é *combinação linear* delas. (Note que $c_1, \ldots, c_n$ são constantes, embora arbitrários.)

280: O conjunto V de todas as funções geradas por $f_1, \ldots, f_n$, para quaisquer escolhas dos valores reais de $c_1, \ldots, c_n$, também é dito *gerado* por elas. Ele pode ser gerado por vários outros conjuntos de funções. Note que sempre:

(i) a função constante nula pertence a V;

(ii) $f_1, \ldots, f_n \in V$;

(iii) somas e múltiplos de funções em V também pertencem a V;

(iv) ou seja, V é fechado sob combinações lineares.

Assim, V é um exemplo de *espaço vetorial.*

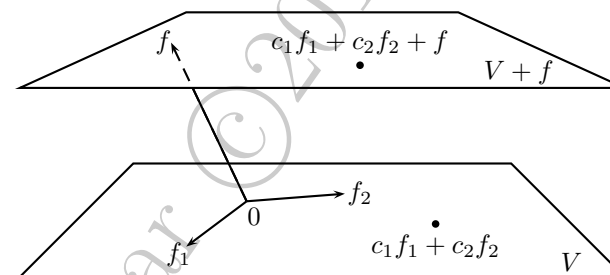
281: Caso $f_1, \ldots, f_n$ sejam linearmente independentes, diz-se que o conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma *base* de V. Seu número n é chamado *dimensão* de V e denotado $\dim V$. (Para isso, mostra-se que n independe da escolha das funções geradoras, enquanto independentes.)

282: Suponha que $f_1, \ldots, f_n$ constituam uma base do espaço V e que $f \colon X \to \mathbb{R}$ seja uma outra função (pertencente, ou não, a V). Então o conjunto das funções

$$g = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n + f,$$

para quaisquer escolhas dos valores reais de $c_1, \ldots, c_n$, é simplesmente indicado $V + f$. Esse é um exemplo de *espaço afim* e é uma *translação* de V, com a mesma dimensão. (Se $f \notin V$, ele não é um espaço vetorial.)

283: Mostre que, nessas condições, toda função $g \in V + f$ pode ser escrita de maneira *única* como $g = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n + f$, ou seja, se supusermos também $g = b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n + f$ então deveremos ter cada $b_i = c_i$.

Essas definições e a teoria de espaços vetoriais são inspiradas pelos conjuntos de vetores geométricos. Utilizamos essa interpretação para resumi-las, com dimensão $n = 2$, neste diagrama:

No restante desta seção, teceremos alguns comentários sobre espaços de funções para o estudante que já teve contato básico com a linguagem necessária, a título de firmar sua interpretação.

284: Em Álgebra Linear, trabalha-se com *somas finitas;* não há séries infinitas porque não há noção de convergência. Assim, toda combinação linear tem um número finito de termos.

285: Um conjunto de vetores S é linearmente independente se, para quaisquer $n \geqslant 1$ e $v_1, \ldots, v_n \in S$ distintos, os únicos escalares $c_1, \ldots, c_n$ que

satisfazem $\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0$ são $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Observe que n é finito, mas arbitrariamente grande.

286: Mostre que um conjunto de vetores é linearmente independente se e somente se todo subconjunto finito seu é linearmente independente.

287: Mostre que, no caso de S ser finito, basta verificarmos a condição para $n = |S|$.

288: O conjunto das funções $X \to \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, porque sabemos somar essas funções e multiplicá-las por escalares (números reais); essas operações são feitas ponto a ponto e resultam em funções também da forma $X \to \mathbb{R}$. Esse espaço é indicado $\mathbb{R}^X$.

Se X é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, então cada conjunto $C^n(X)$, das funções de classe C^n com domínio X, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^X$, porque as combinações lineares de funções contínuas ou n vezes deriváveis são também contínuas ou n vezes deriváveis.

Pelo mesmo motivo, a operação de derivação é uma transformação linear $C^{n+1}(X) \to C^n(X)$.

3.2 Wronskiano

289: Define-se, para $f_1, \ldots, f_n \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe C^{n-1}, o *wronskiano de ordem n*

$$W(f_1,\ldots,f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-2)}(x) & \cdots & f_n^{(n-2)}(x) \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Note que $W(f_1,\ldots,f_n)$ é uma função contínua $]a,b[\to \mathbb{R}$.

290: Mostre que, se $\{f_1,\ldots,f_n\}$ é um conjunto linearmente dependente, então $W(f_1,\ldots,f_n)$ é identicamente nulo. Equivalentemente, se existe $x \in]a,b[$ tal que $W(f_1,\ldots,f_n)(x) \neq 0$, então $\{f_1,\ldots,f_n\}$ é um conjunto linearmente independente.

Veremos em 291 que a recíproca não é verdadeira. Porém, para um conjunto de soluções de uma certa equação diferencial, mostraremos que vale a equivalência “L.D. $\Leftrightarrow W \equiv 0$”.

291: Sejam $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x\,|x|$. Mostre que:

(a) f_1 e f_2 são linearmente dependentes no intervalo $[0,1]$;

(b) f_1 e f_2 são linearmente independentes no intervalo $[-1,1]$;

(c) o wronskiano de f_1 e f_2 é identicamente nulo, calculando-o separadamente para $x \geqslant 0$ e $x < 0$;

(d) f_1 e f_2 não podem ser soluções de $y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$ para $-1 < x < 1$ se ambas g, h forem funções contínuas nesse intervalo.

292: Assuma que $y_1,\ldots,y_n$ sejam soluções de

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = 0,$$

com $p_0,\ldots,p_n \colon]a,b[\to \mathbb{R}$ contínuas e p_n sem zeros. Mostre que, se essas soluções são linearmente independentes, então $W(y_1,\ldots,y_n)(x) \neq 0$ para *todo* $x \in]a,b[$.

Solução: Suponhamos $W(y_1,\ldots,y_n)(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in]a,b[$. Consideremos este sistema linear algébrico:

$$\begin{gathered} c_1y_1(x_0) + \ldots + c_ny_n(x_0) = 0 \\ c_1y_1'(x_0) + \ldots + c_ny_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{gathered}$$

Seu determinante é $W(y_1,\ldots,y_n)(x_0) = 0$; logo, ele tem pelo menos uma solução $c_1,\ldots,c_n$ não-trivial. Com esses valores, definimos

$$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n.$$

Por superposição (261), y é uma solução da equação do enunciado. Também temos

$$y^{(i)}(x_0) = c_1y_1^{(i)}(x_0) + \ldots + c_ny_n^{(i)}(x_0) = 0$$

para todo $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Pelo TEU, $y \equiv 0$, de modo que $\{y_1,\ldots,y_n\}$ é linearmente dependente.

293: Conclua que, com a hipótese em 292 e o fato em 290, se o wronskiano anula-se em um ponto então ele se anula em todo o intervalo de definição e as funções são linearmente dependentes.

294: Novamente na situação de 292, mostre que o wronskiano das soluções por sua vez é solução de $p_nw' + p_{n-1}w = 0$.

Para 2ª ordem: (Temos $n = 2$, equação $p_2y'' + p_1y' + p_0y = 0$ e soluções y_1, y_2.) Escrevemos

$$W = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2,$$

de modo que

$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

e então

$$\begin{aligned} p_2W' &= y_1(p_2y_2'') - y_2(p_2y_1'') = \\ &= y_1(-p_1y_2' - p_0y_2) - y_2(-p_1y_1' - p_0y_1) = \\ &= -p_1(y_1y_2' - y_1'y_2] = -p_1W. \end{aligned}$$

Em geral: Mostraremos esse fato nos próximos pontos.

295 Derivação de determinantes: Seja (f_{ij}) uma matriz quadrada de ordem n, onde as entradas f_{ij} são funções deriváveis em algum intervalo. Seja $D(x) = \det(f_{ij}(x))$. Então D é derivável e

$$D'(x) = D_1(x) + \ldots + D_n(x),$$

onde D_i é o determinante da matriz obtida de (f_{ij}) derivando-se a i-ésima linha.

Solução: O determinante é uma certa soma de produtos, cada qual, quando derivado, torna-se outra soma de produtos, bastando então reorganizar os termos. Simbolicamente, isso pode ser feito a partir da definição de determinante e deixamos a cargo do estudante de Álgebra verificá-lo. Eis uma alternativa:

Consideraremos as entradas f_{ij} também como variáveis. Seja V_{ij} o cofator da entrada f_{ij}: então $D = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}V_{ij}$ quando se desenvolve pela linha i. Note que V_{ij} não depende de f_{ij}, donde $\partial D/\partial f_{ij} = V_{ij}$. Agora, usamos a Regra da Cadeia:

$$D' = \sum_{i,j} \frac{\partial D}{\partial f_{ij}} \cdot \frac{df_{ij}}{dx} = \sum_{i,j} V_{ij}f_{ij}' = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}'V_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} D_i.$$

296 Derivação do wronskiano: Dado $W = W(f_1, \ldots, f_n)$, calculamos

W' pelo ponto anterior:

$$\begin{vmatrix} f_1' & \cdots & f_n' \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-2)} & \cdots & f_n^{(n-2)} \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-2)} & \cdots & f_n^{(n-2)} \\ f_1^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Todos esses determinantes, exceto o último, são nulos porque têm linhas repetidas. Então *a derivada do wronskiano é obtida derivando-se apenas e simplesmente a última linha:*

$$W' = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-2)} & \cdots & f_n^{(n-2)} \\ f_1^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

297: Verifique que o análogo não vale para derivadas de ordens mais altas.

298: Para concluir, retomando-se a situação de 292, temos:

$$p_nW' = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ p_ny_1^{(n)} & \cdots & p_ny_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} p_iy_1^{(i)} & \cdots & -\sum_{i=0}^{n-1} p_iy_n^{(i)} \end{vmatrix} =$$

$$= -p_{n-1}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - p_{n-2}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} - \ldots$$

O segundo termo e os seguintes são todos nulos porque têm repetição de linhas. Logo, $p_nW' + p_{n-1}W = 0$.

Resolvamos essa equação explicitamente:

299 Abel–Liouville: Fixe $x_0 \in]a, b[$. Por separação de variáveis, a solução de $p_n w' + p_{n-1} w = 0$ que passa pelo ponto $(x_0, w(x_0))$ é dada por

$$w(x) = w(x_0) \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)}\, ds\Big).$$

Utilizando diretamente o TEU de equações de variáveis separáveis, vemos que essa é a única solução possível no caso de p_n, p_{n-1} contínuas e p_n sem raízes.

300: Isso fornece outra demonstração de que o wronskiano das soluções da equação em 292 ou é zero em todo $]a, b[$ ou nunca se anula em $]a, b[$.

3.3 Espaço de soluções da equação linear

Esta seção apresenta a equação diferencial linear de ordem superior e caracteriza o conjunto de suas soluções como um espaço afim — ou seja, uma translação de um espaço vetorial — cuja dimensão é igual à ordem da equação. Tal resultado teórico é essencial para, posteriormente, podermos resolver ou mesmo compreender a resolução dessas equações.

301: Uma equação da forma

$$p_n(x) y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) y' + p_0(x) y = r(x)$$

é chamada *linear.* Assumiremos que as funções-coeficiente $p_0, \ldots, p_n$ e a função r são contínuas em um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$.

302: Assumiremos que p_n nunca se anula em I. Então podemos escrever a equação na forma normal

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) = \frac{r(x) - p_{n-1}(x) y^{(n-1)} - \ldots - p_0(x) y}{p_n(x)}.$$

Nesse caso,

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{p_0}{p_n}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{p_1}{p_n}, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = -\frac{p_{n-1}}{p_n}$$

são contínuas em $I \times \mathbb{R}^n$.

303 TEU: Nessas condições, fixados $x_0 \in I$ e $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq I$ e existe uma única solução y do PVI

$$\sum_{j=0}^{n} p_j y^{(j)} = r, \ y(x_0) = c_0, \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

definida em $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Isso é um caso particular de 260. Mostraremos posteriormenteque y está definida sobre todo I.

304: Quando $r \equiv 0$, dizemos que a equação linear é *homogênea.* Caso contrário, a equação é não-homogênea. A *parte homogênea* da equação é obtida substituindo-se r por 0.

Pesquisaremos esses dois tipos em sequência:

305: Defina $L_n \colon C^n(I) \to C(I)$,

$$L_n(f) = \sum_{j=0}^{n} p_j f^{(j)}.$$

Mostre que L_n “preserva combinações lineares”, ou seja, é uma *transformação linear.* Mostre que sua imagem está contida, de fato, em $C(I)$.

306: O *núcleo* de L_n é

$$\mathrm{Nuc}(L_n) = \{\, f \in C^n(I) \mid L_n(f) = 0 \,\},$$

precisamente o conjunto das soluções (definidas em todo I) da parte homogênea da equação linear. A superposição, nesse caso, expressa o fato de $\mathrm{Nuc}(L_n)$ ser subespaço vetorial de $C^n(I)$ (isto é, ser fechado sob combinações lineares). No próximo ponto, mostraremos que $\dim \mathrm{Nuc}(L_n) = n$.

307: A equação diferencial $L_n(y) = 0$ tem n soluções linearmente independentes $y_1, \ldots, y_n$ sobre I. Mais ainda, se y é uma solução de $L_n(y) = 0$ sobre I, então existem escalares $C_1, \ldots, C_n$ univocamente determinados tais que $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$.

Solução: Fixe $x_0 \in I$. Para cada $1 \leqslant j \leqslant n$, consideremos o PVI

$$L_n(y) = 0, \ y^{(k)}(x_0) = \delta_{j(k+1)} \text{ para } 0 \leqslant k \leqslant n - 1,$$

onde $\delta_{uv} = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \text{ se } u = v \\ 0 \text{ se } u \neq v \end{smallmatrix}\right.$ é o usual delta de Kronecker. Pelo TEU, existe uma única solução $y_j \colon I \to \mathbb{R}$ desse PVI.

Use o wronskiano para mostrar que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é linearmente independente. Alternativamente, suponhamos que $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$ para todo $x \in I$. Calculando essa combinação linear em x_0, obtemos

$$c_1 \cdot \cancelto{1}{y_1(x_0)} + c_2 \cdot \cancelto{0}{y_2(x_0)} + \ldots + c_n \cdot \cancelto{0}{y_n(x_0)} = 0,$$

de modo que $c_1 = 0$ e, portanto, $c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$. Derivando, obtemos também $c_2 y_2'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Novamente,

$$c_2 \cdot \cancelto{1}{y_2'(x_0)} + \ldots + c_n \cdot \cancelto{0}{y_n'(x_0)} = 0$$

e obtemos $c_2 = 0$. Procedendo assim, concluímos que todo $c_j = 0$.

Dada a solução $y \colon I \to \mathbb{R}$ de $L_n(y) = 0$, tome $C_j = y^{(j-1)}(x_0)$ para $1 \leqslant j \leqslant n$ e defina $z = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$. Por superposição, z é uma solução de $L_n(y) = 0$. Pelo modo como definimos cada y_j, temos

$$z^{(k)}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} y^{(j-1)}(x_0)\delta_{j(k+1)} = y^{(k)}(x_0)$$

para $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Logo, y e z são soluções do mesmo PVI e o TEU implica $y = z = \sum_j C_j y_j$.

Porque a base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é linearmente independente, são únicos os escalares C_j para cada solução y.

308: Em resumo, se conhecermos uma base para $\operatorname{Nuc}(L_n)$, a solução geral de $L_n(y) = 0$ é escrita como combinação linear dessa base.

309: Os coeficientes $C_1, \ldots, C_n$ têm o mesmo papel, aqui, que a constante de integração nas equações de primeira ordem.

Por exemplo, digamos que uma base de soluções seja $\{1, x, \cos x\}$ e que se queira satisfazer os valores iniciais $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$, $y''(\pi) = -1$. Então escrevemos $y(x) = C_1 1 + C_2 x + C_3 \cos x$, donde $y'(x) = C_2 - C_3 \operatorname{sen} x$ e $y''(x) = -C_3 \cos x$. Por substituição, temos o sistema

$$1C_1 + \pi C_2 - 1C_3 = 0,\ C_2 + 0C_3 = 2,\ 1C_3 = -1.$$

Sua solução consiste de $C_1 = -1 - 2\pi$, $C_2 = 2$, $C_3 = -1$ e obtemos a solução específica $y(x) = (-1 - 2\pi) + 2x - \cos x$.

Finalmente, voltamo-nos a equações não-homogêneas:

310: Se y_p é uma solução particular (ou específica, ou sem coeficientes a determinar) da equação linear $L_n(y) = r$, então a solução geral tem a forma

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n + y_\mathrm{p},$$

onde $C_1, \ldots, C_n$ são constantes a determinar e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é um base do espaço de soluções de $L_n(y) = 0$.

De fato, se y também é solução de $L_n(x) = r$, então a diferença $y - y_\mathrm{p}$ é solução da parte homogênea (ou seja, $L_n(y - y_\mathrm{p}) = 0$) e pode ser escrita como a combinação linear $C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$.

Desse modo, o conjunto das soluções de $L_n(y) = r$ é o espaço afim

$$\operatorname{Nuc}(L_n) + y_\mathrm{p},$$

com dimensão n.

311 Resumo: Para resolver a equação linear $L_n(y) = r$ de ordem n, devemos resolver a parte homogênea $L_n(y) = 0$, cuja solução geral y_h admite n constantes a determinar, e encontrar alguma solução particular y_p da equação original. A solução geral será $y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$.

O termo y_h pode ser escrito como combinação linear (nas constantes a determinar) de n soluções da parte homogênea que sejam linearmente independentes.

Caso se especifique também um PVI, devemos determinar os valores das n constantes substituindo os valores iniciais em $y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$ e suas derivadas, não apenas em y_h (a não ser que a equação original seja homogênea, quando obviamente podemos tomar $y_\mathrm{p} = 0$).

Resolver essas equações, para obter y_h e y_p, é o que faremos nas próximas seções.

3.4 Coeficientes constantes

Nesta seção, trataremos das equações lineares com coeficientes constantes, para as quais podemos encontrar todas as soluções explicitamente.

Lembramos que devemos encontrar (i) uma base de soluções da parte homogênea e (ii) uma solução particular da equação original, para então (iii) escrever a solução geral.

312: Recorde que as soluções da equação de primeira ordem $y' + ky = 0$ são da forma $y(x) = Ce^{-kx}$.

313: A equação de segunda ordem $ay'' + by' + cy = 0$, onde a, b, c são constantes reais e $a \neq 0$, tem soluções exponenciais?

Solução: Escrevendo $y(x) = e^{\lambda x}$, temos $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ e $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Substituindo na equação, obtemos $a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$, ou seja, $(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$.

Como a exponencial nunca se anula, concluímos que $y(x) = e^{\lambda x}$ é solução da equação se e somente se λ for uma raiz do chamado *polinômio característico* $P(t) = at^2 + bt + c$.

Note que os coeficientes de $P(t) = at^2 + bt^1 + ct^0$ são os mesmos da equação $ay^{(2)} + by^{(1)} + cy^{(0)} = 0$.

As raízes desse polinômio podem ser encontradas pelo método de Baskhara, que nos permite saber se elas são reais ou complexas. Digamos que sejam λ_1 e λ_2:

314: Se λ_1, λ_2 são *reais e distintas*, obtemos duas soluções da equação: $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$. Elas são linearmente independentes, porque uma não é múltipla da outra. Portanto, $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ é uma base para as soluções da equação proposta.

Atenção: Isso só vale quando podemos aplicar nosso estudo anterior. Aqui, precisamos ter λ_1, λ_2 raízes *reais* para que y_1, y_2 sejam funções reais.

315: Se λ_1, λ_2 são raízes reais, mas idênticas, isto é, se $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ é uma raiz dupla do polinômio característico, então, do mesmo modo, sabemos que $e^{\lambda x}$ é solução.

Como λ é raiz dupla do polinômio, então não somente $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, mas também $2a\lambda + b = 0$, como mostra o método de Bhaskara quando o discriminante é nulo.

Use isso para verificar, por substituição direta, que também $xe^{\lambda x}$ é solução. (Aprenderemos em 437, quando tratarmos de redução de ordem, como essa solução pôde ser encontrada.)

Novamente, as duas soluções são linearmente independentes porque não são múltiplas entre si. Então $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ é uma base para as soluções da equação dada.

Para lidar com as raízes complexas, precisamos considerar também funções e equações com valores complexos; façamo-lo brevemente neste ponto:

316: Suponha r, s, u, v funções reais definidas em um mesmo intervalo. Se $r+si$ é contínua e se $u+vi$ é uma solução complexa de $ay''+by'+cy = r+si$, então u e v são soluções reais de $ay'' + by' + cy = r$ e $ay'' + by' + cy = s$, respectivamente.

Indicação: A função complexa $u + vi$ pode ser vista como uma função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, ou seja, uma curva no plano à qual se aplica o Cálculo geométrico, com derivação linear e feita componente a componente.

Note: Vale também o resultado mais geral, análogo, a respeito de uma equação linear homogênea qualquer $\sum_{j=0}^{n} p_j(x) y^{(j)} = 0$.

Voltamos às raízes do polinômio característico:

317: Se λ_1, λ_2 são raízes complexas, elas são conjugadas e podemos escrever $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$.

318: Sabemos, por substituição, que $e^{(\alpha+\beta i)x}$ é uma solução complexa de $ay'' + by' + cy = 0$. Porém, essa exponencial é igual a

$$e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x)] = [e^{\alpha x} \cos(\beta x)] + [e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)]i.$$

Então, pelo que vimos, $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$ são soluções reais dessa equação. Usamos o wronskiano para determinar que elas são linearmente independentes:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \beta \neq 0.$$

Logo, $\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)\}$ é uma base para o espaço das soluções reais da equação.

319 Conclusão: Para resolver a equação $ay'' + by' + cy = 0$, primeiro encontramos as raízes do polinômio característico $P(t) = at^2 + bt + c$. A solução da equação é então dada em termos delas, assim:

raízes	solução geral
reais distintas λ_1, λ_2	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
real dupla λ	$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
complexas $\alpha \pm \beta i$	$C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$

Não demonstraremos a conclusão análoga para ordens maiores que 2, mas convém entendê-la bem:

320: Analogamente, dada

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_0 y = 0 \text{ com } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ e } a_n \neq 0,$$

formamos o polinômio característico $P(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$. Liste as raízes reais de P como $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, com multiplicidades $k_1, \ldots, k_p$, respectivamente, e as raízes complexas em pares conjugados $\mu_1, \mu_1^*, \ldots, \mu_q, \mu_q^*$, com multiplicidades $l_1, \ldots, l_q$, respectivamente. Então

$$P(t) = a_n (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_p)^{k_p} (t-\mu_1)^{l_1} (t-\mu_1^*)^{l_1} \ldots (t-\mu_q)^{l_q} (t-\mu_q^*)^{l_q}.$$

Escreva $\mu_j = \alpha_j + \beta_j i$ com $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ e $\beta_j \neq 0$. Uma base para o espaço

de soluções da equação dada constitui-se das funções

$$
\begin{gathered}
e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots,\ x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x},\\
\vdots\\
e^{\lambda_p x},\ xe^{\lambda_p x}, \ldots,\ x^{k_p-1}e^{\lambda_p x},\\
e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x),\ xe^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), \ldots,\ x^{l_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x),\\
e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}(\beta_1 x),\ xe^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}(\beta_1 x), \ldots,\ x^{l_1-1}e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}(\beta_1 x),\\
\vdots\\
e^{\alpha_q x}\cos(\beta_q x),\ xe^{\alpha_q x}\cos(\beta_q x), \ldots,\ x^{l_q-1}e^{\alpha_q x}\cos(\beta_q x),\\
e^{\alpha_q x}\operatorname{sen}(\beta_q x),\ xe^{\alpha_q x}\operatorname{sen}(\beta_q x), \ldots,\ x^{l_q-1}e^{\alpha_q x}\operatorname{sen}(\beta_q x).
\end{gathered}
$$

Indicação: É preciso verificar que (i) todas essas funções são soluções da equação dada, que (ii) elas são linearmente independentes entre si e que (iii) há precisamente n delas.

Determine a solução geral destas equações:

321: $3y'' - 13y' + 12y = 0$.
Solução: O polinômio característico é $P(t) = 3t^2 - 13t + 12$, cujas raízes são 3 e 4/3, distintas e simples. Então uma base do espaço de soluções é dada por $\{e^{3x}, e^{4x/3}\}$ e a solução geral é $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{4x/3}$.

322: $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.
Solução: O polinômio característico é

$$P(t) = t^5 + 8t^3 + 16t = t(t^4 + 8t^2 + 16) = t(t^2 + 4)^2.$$

Suas raízes são 0 (simples) e $2i, -2i$ (duplas), de modo que

$$\{1, \cos 2x, x\cos 2x, \operatorname{sen} 2x, x \operatorname{sen} 2x\}$$

é uma base do espaço de soluções. A solução geral é

$$y(x) = C_1 + C_2\cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + C_4 x\cos 2x + C_5 x \operatorname{sen} 2x.$$

323: $y^{(4)} - 4y''' + 13y'' = 0$.
Solução: O polinômio característico é

$$P(t) = t^4 - 4t^3 + 13t^2 = t^2(t^2 - 4t + 13),$$

cujas raízes são 0 (dupla) e $2+3i, 2-3i$ (simples). Então

$$\{1, x, e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\operatorname{sen} 3x\}$$

é uma base do espaço de soluções e a solução geral é

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}\cos 3x + C_4e^{2x}\operatorname{sen} 3x.$$

324: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

325: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

326: $y'' - 9y = 0$.

327: $y'' + 9y = 0$.

328: $y'' - 4y' + 5y = 0$.

329: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

330: $y'' + 2y' + y = 0$.

331: $y'' - 2y' + 5y = 0$.

332: $2y'' - 4y' + 8y = 0$.

333: $y''' - y' = 0$.

334: $y''' + y'' - 6y' = 0$.

335: $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

336: $y''' + y = 0$.

337: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

338: $y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0$.

339: $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$.

340: $y^{(4)} = 0$.

341: $y^{(4)} - 2y'' = 0$.

342: $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$.

343: $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}y^{(j)} = 0$.

Resolva os problemas de valor inicial:

344: $3y'' - 13y' + 12y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
Solução: Conforme 321, a solução geral é $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{4x/3}$, de modo que $y'(x) = 3C_1e^{3x} + \frac{4}{3}C_2e^{4x/3}$. Substituindo, encontramos as equações $1C_1 + 1C_2 = 1$ e $3C_1 + \frac{4}{3}C_2 = 2$, que são resolvidas simultaneamente por $C_1 = 2/5$ e $C_2 = 3/5$. Assim, a solução específica do PVI é $y(x) = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{4x/3}$.

345: $y'' - 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

346: $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.

347: $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

348: $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

349: $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = e^{\pi}$.

350: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$, $y''(1) = 0$.

Agora, continuando a considerar equações lineares com coeficientes constantes, aprenderemos a determinar uma solução particular da equação não-homogênea. Lembramos a forma em consideração:

$$ay'' + by' + cy = r(x), \text{ ou em geral } a_n y^{(n)} + \ldots + a_0 y^{(0)} = r(x)$$

onde os coeficientes são constantes.

351: Pelo princípio da superposição (261), se r é uma soma algébrica de várias funções r_j, então podemos quebrar a questão em vários "subproblemas", procurando uma solução de cada equação $ay'' + by + cy = r_j$ e tomando a soma algébrica dessas soluções como solução particular de $ay'' + by + cy = r$.

352: Note que se r é constante e se $c \neq 0$ (ou $a_0 \neq 0$) então a função constante $y = r/c$ (ou $y = r/a_0$, respectivamente) resolve a equação.

Estudaremos dois métodos diferentes para encontrar a solução particular: A variação das constantes, de Lagrange, sempre conduz a uma solução mas requer integrações que, freqüentemente, podem ser complicadas. Já utilizar os coeficientes indeterminados requer, às vezes, estimativas iniciais ou "chute" para ser menos trabalhoso.

353 Lagrange: Dada $ay'' + by' + cy = r$, seja $\{y_1, y_2\}$ uma base do espaço de soluções de sua parte homogênea; então escrevemos $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$. O *método da variação das constantes, ou dos parâmetros,* propõe determinar uma solução da equação original com a forma

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

onde substituímos as constantes C_1, C_2 por funções, assim como na Seção 2.3. Em termos técnicos, procuramos uma solução não apenas no subespaço vetorial gerado por y_1, y_2, mas em todo o ideal que elas geram no anel $C^2(I)$.

Lagrange observou que impor a condição adicional $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ simplifica enormemente os cálculos:

$$y_p' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

e então

$$y_p'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''.$$

Como desejamos $ay_p'' + by_p' + cy_p = r$, substituímos:

$$a(C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'') + b(C_1y_1' + C_2y_2') + c(C_1y_1 + C_2y_2) = r.$$

Já que $C_i(ay_i'' + by_i' + cy_i) = 0$ para ambos $i = 1, 2$, simplificamos para obter $a(C_1'y_1' + C_2'y_2') = r$.

Assim,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r/a \end{bmatrix}.$$

Esse sistema linear funcional tem determinante $W = W(y_1, y_2)$, que nunca se anula. Sua solução, portanto, é dada por

$$C_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r/a & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{y_2 r}{aW} \text{ e } C_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r/a \end{vmatrix} = \frac{y_1 r}{aW}.$$

(Ou seja, calculando as funções em cada x, temos um sistema determinado cujas soluções, pelo método de Cramer, também dependem de x.) Desse modo, obtemos C_1, C_2 integrando-se tais expressões: quaisquer primitivas bastarão, de modo que convirá tomar as mais simples (e sem constantes de integração).

354 Exemplo: $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen} x$.

Já sabemos determinar bases para as soluções da parte homogênea: a mais simples é $\{e^x, e^{2x}\}$, cujo wronskiano é

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}.$$

De acordo com Lagrange, temos

$$C_1' = -\frac{e^{2x}\operatorname{sen} x}{1e^{3x}} = -e^{-x}\operatorname{sen} x \Rightarrow C_1 = \frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x),$$

onde integramos por partes (duas vezes), por exemplo. Analogamente,

$$C_2' = \frac{e^x \operatorname{sen} x}{1e^{3x}} = e^{-2x}\operatorname{sen} x \Rightarrow C_2 = \frac{-e^{-2x}}{5}(2\operatorname{sen} x + \cos x),$$

de modo que uma solução particular para a equação dada é

$$\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)\cdot e^x + \frac{-e^{-2x}}{5}(2\operatorname{sen} x + \cos x)\cdot e^{2x} = \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} x + \tfrac{3}{10}\cos x$$

e a solução geral é

$$y(x) = D_1e^x + D_2e^{2x} + \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} x + \tfrac{3}{\cos} x$$

onde os parâmetros D_1, D_2 são constantes arbitrárias.

355: Generalize o método de Lagrange para equações de ordem arbitrária.

356 Exemplo: $y''' + y' = x^2$.

A equação homogênea associada tem base $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$ com wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 1.$$

Procuramos uma solução particular

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\operatorname{sen} x.$$

Lagrange impõe

$$C_1'(x)1 + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\operatorname{sen} x = 0,$$

donde $y_{\mathrm{p}}'(x) = -C_2(x)\operatorname{sen} x + C_3(x)\cos x$, e impõe também

$$C_1'(x)0 + C_2'(x)(-\operatorname{sen} x) + C_3'(x)\cos x = 0,$$

donde $y_{\mathrm{p}}''(x) = -C_2(x)\cos x - C_3(x)\operatorname{sen} x$ e

$$y_{\mathrm{p}}'''(x) = -C_2'(x)\cos x + C_2(x)\operatorname{sen} x - C_3'(x)\operatorname{sen} x - C_3'(x)\cos x.$$

Para que $y_{\mathrm{p}}''' + y_{\mathrm{p}} = x^2$, portanto, devemos ter

$$-C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\operatorname{sen} x = x^2.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

Como $W = 1$, vem

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ x^2 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = x^2 \Rightarrow C_1(x) = \frac{x^3}{3},$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen} x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & x^2 & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -x^2\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2(x) = -x^2\operatorname{sen} x - 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x,$$

$$C_3'(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & -\cos x & x^2 \end{vmatrix} = -x^2\operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_3(x) = x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x.$$

Então

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{x^3}{3}\cdot 1 + (-x^2\operatorname{sen} x - 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x)\cdot\cos x + \\ + (x^2\cos x - 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x)\cdot\operatorname{sen} x = \\ = \frac{x^3}{3} - 2x$$

e a solução geral é

$$y(x) = D_1 + D_2\cos x + D_3\operatorname{sen} x + \frac{x^3}{3} - 2x$$

com D_1, D_2, D_3 constantes arbitrárias.

Determine a solução geral de cada equação:

357: $y'' - 3y' + 2y = e^{-5x}$.

358: $y'' + y' - 6y = \operatorname{sen} x$.

359: $y'' + y' - 6y = 5e^{2x}$.

360: $y'' - 5y' + 6y = 12$.

361: $y'' + 2y' + y = 8e^x$.

362: $y'' - 2y' + y + 6\operatorname{sen} x = 0$.

363: $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

364: $y'' - y = xe^x$.

365: $y'' + y' - 2y = 8\operatorname{sen} 2x$.

366: $y'' + 9y = \cos 2x$.

367: $y'' + y = 4x\operatorname{sen} x$.

368: $y''' - 8y = e^{2x}$.

369: $y'' - 3y' + 2y = 70(e^{-5x} + \operatorname{sen} x)$.

370: $y'' + y' - 6y = 100(e^{2x} + \operatorname{sen} x + 3)$.

Resolva os problemas de valor inicial:

371: $y'' - 4y = x^2e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

372: $y'' - 3y' = x + \cos x$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = \pi$.

373: O *método dos coeficientes indeterminados* afirma que, caso r tenha uma das formas

$$r(x) = (c_kx^k + \ldots + c_1x + c_0)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ ou}$$
$$r(x) = (c_kx^k + \ldots + c_1x + c_0)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),$$

que são bastante frequentes em aplicações, então uma solução particular da equação linear tem a forma semelhante

$$y_p(x) = x^l(b_kx^k + \ldots + b_1x + b_0)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \\ + x^l(d_kx^k + \ldots + d_1x + d_0)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x).$$

Encontram-se $l, b_0, \ldots, b_k, d_0, \ldots, d_k$ assim:

(i) se $k = 0$, mantenha b_0, d_0, que se tornam constantes multiplicativas;

(ii) l será a multiplicidade (possivelmente 0) de $\alpha + \beta i$ como raiz do polinômio característico;

(iii) $b_0, \ldots, b_k, d_0, \ldots, d_k$ serão os mais simples que satisfaçam o sistema induzido por substituição de y_p.

Referência: Uma discussão aprofundada, com argumentação formal e abstrata, é feita em [BoDi], Seção 3.5.

Este método, ao contrário do de Lagrange, não requer integração, mas aplica-se apenas a algumas formas da função r. Pode-se, caso se intua uma forma mais restrita para y_p, eliminar diversos coeficientes imediatamente e aliviar o trabalho, embora isso torne o método mais artesanal.

374 Exemplo: $y'' + y = 4x \operatorname{sen} x$.
O polinômio característico é $t^2 + 1$. Temos

$$r(x) = 4x \operatorname{sen} x = (4x^1 + 0)e^{0x}\operatorname{sen}(1x)$$

e $0 + 1i$ tem multiplicidade 1 como raiz do polinômio. Então procuramos

$$y_p(x) = x^1(b_1x + b_0)e^{0x}\cos(1x) + x^1(d_1x + d_0)e^{0x}\operatorname{sen}(1x) = \\ = (b_1x^2 + b_0x)\cos x + (d_1x^2 + d_0x)\operatorname{sen} x.$$

Com essa expressão, calculamos

$$y_p'' + y_p = (2b_1 + 6d_1x + 2d_0)\cos x + (-4b_1x - 2b_0 + 2d_1)\operatorname{sen} x$$

(verifique!), que desejamos que valha $4x \operatorname{sen} x$. Para tanto, comparamos os coeficientes de cada termo:

$$\begin{cases} 2b_1 + 6d_1x + 2d_0 = 0 \\ -4b_1x - 2b_0 + 2d_1 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 + 2d_0 = 0 \\ 6d_1 = 0 \\ -4b_1 = 4 \\ -2b_0 + 2d_1 = 0 \end{cases}$$

Assim, obtemos $b_1 = -1$, $b_0 = 0$, $d_1 = 0$, $d_0 = 1$ e

$$y_p(x) = -x^2\cos x + x \operatorname{sen} x$$

e a solução geral é

$$y(x) = D_1\cos x + D_2\operatorname{sen} x - x^2\cos x + x\operatorname{sen} x.$$

375 Exemplo: $y'' - y = x^2e^x$.
O polinômio característico é $t^2 - 1$. Temos

$$r(x) = x^2e^x = (1x^2 + 0x + 0)e^{1x}\cos(0x)$$

e $1 + 0i$ tem multiplicidade 1 como raiz do polinômio. Então procuramos

$$y_p(x) = x^1(b_2x^2 + b_1x + b_0)e^{1x}\cos(0x) = (b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x)e^x,$$

onde não escrevemos um termo com $\operatorname{sen}(0x)$ porque este fator o anularia.
Substituindo-se, calculamos

$$y_p''(x) - y_p(x) = e^x[6b_2x^2 + (6b_2 + 4b_1)x + (2b_1 + 2b_0)],$$

que devemos igualar a x^2e^x. Isso é feito comparando-se o coeficiente de cada termo:

$$6b_2 = 1,\ 6b_2 + 4b_1 = 0,\ 2b_1 + 2b_0 = 0.$$

Esse sistema é resolvido por $b_0 = 1/4$, $b_1 = -1/4$ e $b_2 = 1/6$, de modo que

$$y_{\mathrm{p}}(x) = (\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x)e^x$$

e a solução geral é

$$y(x) = D_1e^x + D_2e^{-x} + e^x(2x^3 - 3x^2 + 3x)/12.$$

376: Resolva os exercícios anteriores utilizando, agora, o método dos coeficientes indeterminados.

3.5 Gravitação universal

Aqui, nosso objetivo é descrever a órbita de um planeta, cometa ou outro corpo qualquer em torno de um sol ou grande massa central situada na origem de um sistema de coordenadas, órbita essa regida exclusivamente pela força gravitacional newtoniana. Também deduziremos a equação diferencial de todas as órbitas de um corpo em um campo de forças central ou radial, de modo geral.

Usaremos as letras m, M para designar tanto as massas desses corpos, como eles próprios, e consideraremos M grande o suficiente para que a força exercida por m seja desprezível e não o mova da origem.

377: Em um espaço tridimensional, o movimento de uma partícula sujeita a uma força central é plano, isto é, a trajetória e o centro da força estão contidos em um único plano. Veja [FiNe], p. 156.

378: Desse modo, podemos limitar-nos a um plano de trabalho descrito em coordenadas cartesianas (x, y) ou nas polares associadas via $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$; suporemos sempre que $r > 0$ porque M ocupa a origem.

O que procuramos são funções vetoriais $(x(t), y(t))$ ou $(r(t), \theta(t))$ que descrevem a posição de m em um instante t.

379: Derivando quanto a t, obtemos

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$
$$\dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

e então

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - r\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - r(\dot{\theta})^2\cos\theta,$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r(\dot{\theta})^2\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

ou seja,

$$\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\,\mathrm{sen}\,\theta = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2,$$
$$\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta - \ddot{y}\cos\theta = -2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta}.$$

380 2ª lei de Newton: Temos sempre

$$F = m\underbrace{\tfrac{d^2}{dt^2}(x, y)}_{\text{aceleração}} = (m\ddot{x}, m\ddot{y}).$$

381: Quando o campo é centrífugo, isto é, a força atua no mesmo sentido do raio vetor, vale $F = |F|(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$; quando o campo é centrípeto, vale $F = -|F|(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$.

Então $\ddot{x} = \pm\frac{|F|}{m}\cos\theta$ e $\ddot{y} = \pm\frac{|F|}{m}\,\mathrm{sen}\,\theta$ em que o sinal é positivo quando o campo é centrífugo e negativo no caso centrípeto; substituindo, obtemos

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = \pm|F|/m,$$
$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0.$$

Desse sistema, derivamos a conservação do momento angular e a equação de Binet, que serão as únicas a serem utilizadas no restante do raciocínio.

382 Conservação angular: O *momento angular* de m é

$$L = mrV = mr^2\dot{\theta}$$

(onde V é sua velocidade linear). Vemos que

$$\dot{L} = \tfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0,$$

de modo que L é constante.

383: Há, portanto, duas possibilidades:

Se $L = 0$, então $\dot{\theta} = 0$ e m move-se em linha reta radial, afastando-se ou caindo em M.

Se $L \neq 0$, então ou $\dot{\theta} > 0$ ou $\dot{\theta} < 0$ (já que $mr^2 > 0$), fazendo com que θ seja *sempre* estritamente crescente ou decrescente. Assim, um corpo em órbita não inverte o sentido de sua translação.

384 2ª lei de Kepler: A área varrida pelo raio vetor de m entre os instantes t_0 e t é

$$A(t) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{[r(\theta)]^2}{2}\,d\theta,$$

onde integramos em coordenadas polares. Então

$$\dot{A}(t) = \frac{[r(t)]^2}{2}\,\dot\theta(t) = L/2m$$

e concluímos pela *constância da velocidade areolar.* Isso implica que m tem velocidade menor no ponto da órbita mais afastado de M e velocidade maior no ponto mais próximo.

385 Binet: Note que

$$\tfrac{d}{d\theta}(r^{-1}) = -r^{-2}\tfrac{dr}{d\theta} = -r^{-2}\tfrac{dr}{dt}/\tfrac{d\theta}{dt} = -r^{-2}\dot r/\dot\theta = -m\dot r/L;$$

logo,

$$\tfrac{d^2}{d\theta^2}(r^{-1}) = \tfrac{d}{d\theta}(-m\dot r/L) = -(m/L)(\tfrac{d\dot r}{dt}/\tfrac{d\theta}{dt}) = -m\ddot r/L\dot\theta.$$

Substituindo do sistema, vem

$$\tfrac{d^2}{d\theta^2}(r^{-1}) = -m[r(\dot\theta)^2 \pm |F|/m]/L\dot\theta = -1/r \mp |F|/L\dot\theta.$$

Então, para r em função de θ, temos

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{r}\Big) + \frac{1}{r} = \mp\frac{m|F|r^2}{L^2},$$

em que o sinal é negativo no caso de campos centrífugos.

Até aqui, trabalhamos com *qualquer* campo central: a equação de Binet e a 2ª lei de Kepler são gerais.

Agora, veremos como a lei da gravitação universal de Newton mantém os corpos em órbitas, que são secções cônicas, descritas pelas três leis de Kepler.

386: No caso particular da força gravitacional F exercida por M sobre m em (x, y), seu valor absoluto é $|F| = GMm/r^2$ e o campo é centrípeto. Assim,

$$F = -|F|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = -\frac{GMm}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x, y).$$

387 1ª lei de Kepler: Com $z = 1/r$ e $|F| = GMm/r^2$, obtemos da equação de Binet esta equação linear de 2ª ordem:

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

A parte homogênea tem solução geral $z_{\mathrm{h}} = C_1\cos\theta + C_2\operatorname{sen}\theta$, que pode ser reescrita como $z_{\mathrm{h}} = -k\cos(\theta-\theta_0)$ com $k > 0$; a escolha desse sinal será

justificada a seguir. Por outro lado, uma solução particular da equação original é a constante $z_{\mathrm{p}} = GMm^2/L^2$. Logo,

$$\frac{1}{r(\theta)} = -k\cos(\theta-\theta_0) + GMm^2/L^2,$$

ou seja,

$$r(\theta) = \frac{E/k}{1 - E\cos(\theta-\theta_0)}$$

se definirmos $E = kL^2/GMm^2 > 0$.

Escreva uma solução análoga para um campo centrífugo.

388 Cônicas: Mostre que isso é a equação de uma cônica de excentricidade $E \geqslant 0$ com um foco em M e sendo θ_0 o ângulo entre seu eixo principal e o das abscissas. (A cônica é uma parábola se $E = 1$, elipse se $E < 1$, ou hipérbole se $E > 1$.) Conclua que planetas não caem em espiral.

Indicação: Consideremos o caso da elipse, quando $E < 1$. Uma aplicação bruta das transformações de coordenadas, ou uma espiada apressada em um formulário, pode induzir-nos a trabalhar com a origem no centro da elipse (a tradicional fórmula $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), mas em nosso caso a origem está no foco onde se encontra M. Outra dificuldade é que uma mudança de coordenadas envolve um cálculo que, começado do jeito errado, pode ser muito trabalhoso.

Suponhamos, porém, que a elipse tenha semi-eixo maior a e semi-eixo menor b. Então sua excentricidade é $E = \sqrt{a^2-b^2}/a$, a distância entre seus focos é $2\sqrt{a^2-b^2}$, e a soma das distâncias de um ponto na curva aos focos é $2a$. Uma delas é r, de modo que a outra (no lado oposto ao foco em M) é $2a - r$. O ângulo entre o raio vetor de medida r e o eixo principal, dependendo das posições relativas, é $\theta-\theta_0$ ou $\theta_0-\theta$ ou $2\pi-\theta+\theta_0$, todos com mesmo cosseno. Do triângulo formado pelos dois focos e o ponto da curva, obtemos

$$(2a-r)^2 = \Big(2\sqrt{a^2-b^2}\Big)^2 + (r)^2 - 2\Big(2\sqrt{a^2-b^2}\Big)(r)\cos(\theta-\theta_0).$$

Simplifique e resolva em r para determinar

$$r = \frac{b^2/a}{1-E\cos(\theta-\theta_0)} = \frac{E/k}{1-E\cos(\theta-\theta_0)},$$

em que fazemos $k = E/[a(1-E^2)]$.

389: Quais são as possíveis trajetórias de um elétron defletido por uma fonte negativa?

390 Periodicidade: Quando $E < 1$ e a órbita é elíptica, mostre que r é periódico em função de t. (Abaixo, chamaremos T a esse período.)

Solução: Quando a órbita é uma elipse ($E < 1$), a função $r(\theta)$ está definida para todos os ângulos (seu denominador nunca se anula) e é explicitamente periódica quanto a θ, com período 2π. Porque a velocidade areolar é constante, o tempo necessário para o raio vetor varrer toda a elipse é sempre o mesmo independentemente do ângulo inicial. Isso corresponde a uma translação completa, ao longo da qual θ aumenta ou diminui 2π e, assim, r é periódico também quanto a t.

391 3ª lei de Kepler: Mostremos que a razão T^2/a^3 é a mesma para qualquer corpo em torno de M, sendo T o período de translação e a o raio médio de uma órbita elíptica (ou seja, seu semi-eixo maior). (Sejam também, como acima, b seu semi-eixo menor e E sua excentricidade.)

Vimos que a velocidade areolar é constante $L/2m$, de modo que $\pi ab/T = L/2m$. Então $T = 2\pi abm/L$ e

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 b^2}{L^2 a} = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} a(1-E^2) = \\ = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2}(E/k) = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} \cdot \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

é constante e independe de m e a.

Reciprocamente, a lei da gravitação de Newton é uma conseqüência da astronomia de Kepler; tal fato tem grande valor científico e histórico, porque se deduz uma lei geral e teórica a partir de leis experimentais específicas:

392 Dedução da gravitação universal: Postula-se que a força gravitacional é atratora, ao longo da reta entre os dois corpos, ou seja, o campo gravitacional é (central) centrípeto. Calculamos $\dot{A} = L/2m$ e, assim, a 2ª lei de Kepler afirma que L é constante.

A 1ª lei informa que elipses

$$r(\theta) = \frac{E/k}{1 - E\cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{onde } E < 1$$

satisfazem a equação de Binet para campos centrípetos. Porém,

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{r}\Big) + \frac{1}{r} = (k/E)(E\cos(\theta-\theta_0)) + (k/E)(1 - E\cos(\theta-\theta_0)) = k/E,$$

donde $k/E = m|F|r^2/L^2$.

Enquanto mostrávamos a 3ª lei de Kepler, calculamos

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} a(1-E^2) = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2}(E/k)$$

exclusivamente a partir da velocidade areolar. Agora, assumindo essa lei, escrevamos $T^2/a^3 = C_M$ constante: obtemos

$$C_M = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} \cdot \frac{L^2}{m|F|r^2} = \frac{4\pi^2 m}{|F|r^2}.$$

Pelo princípio da ação e reação de Newton, m também atrai M gravitacionalmente com uma força de mesmo módulo $|F|$. Por simetria, então,

$$\frac{4\pi^2}{C_M} \cdot \frac{m}{r^2} = |F| = \frac{4\pi^2}{C_m} \cdot \frac{M}{r^2}$$

em que C_m é outra constante. Note que cada constante depende apenas do corpo correspondente. Portanto, tomando $m = 1$, deduzimos que $C_M = C_1/M$; definindo $G = 4\pi^2/C_1$ e retomando m arbitrário, obtemos

$$|F| = \frac{4\pi^2}{C_1/M} \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{GMm}{r^2}.$$

Encerramos nossos cálculos com duas extensões da teoria desenvolvida:

393 Movimento de M: Supusemos sempre que M não se movia e permanecia como centro de nosso sistema de coordenadas. Contudo, pode-se requerer o estudo de órbitas quando m é comparável com M: por exemplo, nos casos Terra–Lua, Sol–Júpiter, estrelas binárias, etc. O que se pode supor, nesses casos, é que o centro de massa de M e m tem movimento inercial, isto é, retilíneo e uniforme.

Alterações: Qualquer referencial inercial, agora, é igualmente adequado. Deve-se descrever o movimento de m, M por vetores V_m, V_M, respectivamente; as velocidades e acelerações pertinentes são $\dot{V}_m, \dot{V}_M$ e $\ddot{V}_m, \ddot{V}_M$. Desse modo, pode-se escrever a segunda lei de Newton para m e M, com as forças $-GMm(V_M - V_m)/|V_M - V_m|^3$ e $-GMm(V_m - V_M)/|V_m - V_M|^3$, respectivamente. Subtraia essas equações e conclua que as duas primeiras leis de Kepler não sofrem modificação, enquanto que a terceira transforma-se em $T^2/a^3 = 4\pi^2/G(M+m)$.

394 Relatividade: Considerando-se efeitos relativísticos, a equação de Binet transforma-se na equação de Schwarzschild que não é linear: sua resolução complica-se, mas pode-se fazer uma boa aproximação para explicar

a discrepância da órbita de Mercúrio. Veja [FiNe], p. 174–176, e [O'Ne], p. 372–380. Nessa teoria, também, corpos que transladam dispendem energia mecânica na forma de ondas gravitacionais e, portanto, planetas caem em espiral, embora seu tempo de queda seja muito superior à duração do Universo.

3.6 Osciladores harmônicos

Osciladores harmônicos correspondem a classes especiais de equações lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes, que descrevem diversos fenômenos físicos de interesse.

Primeiramente, apresentaremos a teoria geral dos osciladores harmônicos, para depois contextualizar alguns exemplos.

395: O *oscilador harmônico simples* é a família de fenômenos descritos pela equação

$$a\ddot{x} + cx = 0,$$

sendo as constantes a, c, em geral, estritamente positivas.

396: Também se estuda o *oscilador amortecido* com equação

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$$

onde ainda b é uma constante positiva.

Em estudos aplicados, o termo $b\dot{x}$ pode ter outra forma, mais complexa, dependendo da modelagem feita. Veremos, porém, que a *linearização* (que consiste em substituir o termo real pelo linear) simplifica enormemente sistemas complexos, a um certo preço.

397: O oscilador é *forçado* se houver parte não-homogênea em sua equação, geralmente uma expressão senoidal:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = r(x).$$

Vamos estudar todas essas classes, uma por vez:

398: A equação $a\ddot{x} + cx = 0$ com $a, c > 0$ tem polinômio característico $P(u) = au^2 + c$ com raízes complexas $\pm i\sqrt{c/a}$, de modo que sua solução geral é

$$x(t) = C_1 \cos\left(t\sqrt{\frac{c}{a}}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{c}{a}}\right) = \\ = A\cos(\omega t + \theta),$$

onde $\omega = \sqrt{c/a}$ e A, θ são constantes a determinar, com $A > 0$. Chamam-se A de *amplitude,* θ de *fase* e ω de *frequência angular* do oscilador.

399: Note que x é periódica com período T determinado assim:

$$\omega(t + T) + \theta = (\omega t + \theta) + 2\pi \Leftrightarrow T = 2\pi/\omega,$$

ou seja, $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ onde $f = T^{-1}$ é a *frequência* do oscilador harmônico.

400: Por simples derivação, obtêm-se estas expressões para a "velocidade" e a "aceleração" do oscilador:

$$\dot{x}(t) = -\omega\ A\operatorname{sen}(\omega t + \theta) = A\omega\ \cos(\omega t + \theta + \tfrac{\pi}{2}),$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \theta) = A\omega^2\cos(\omega t + \theta + \pi).$$

Desse modo, $\dot{x}$ tem fase atrasada $\pi/2$ em relação a x e amplitude $A\omega$, enquanto $\ddot{x}$ tem fase atrasada π em relação a x e amplitude $A\omega^2$.

401: Vemos também que $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

402: Os valores iniciais tradicionais são $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Então

$$x_0 = A\ \cos(\omega 0 + \theta) = A\ \cos\theta,$$
$$v_0 = A\omega\cos(\omega 0 + \theta + \tfrac{\pi}{2}) = -A\omega\operatorname{sen}\theta,$$

o que permite determinar A e θ, ou mostrar diretamente que

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)$$

(caso $\omega = 0$ então $x = x_0$).

403: A *energia* do oscilador harmônico é definida assim:

$$E = \tfrac{1}{2}a(\dot{x})^2 + \tfrac{1}{2}cx^2.$$

Os termos $E_C = a(\dot{x})^2/2$ e $E_P = cx^2/2$ são chamados *energias cinética e potencial,* respectivamente.

No caso de alguns fenômenos mecânicos, como 417, essa definição motiva-se somando-se a energia cinética usual e uma energia potencial igual, em valor absoluto, ao trabalho efetuado sobre a massa a da origem 0 até o valor atual de x:

$$\mathcal{T} = \int_0^x \text{“força”}\, ds = \int_0^x (a\ddot{s})\, ds = \int_0^x (-cs)\, ds = -\tfrac{1}{2}cx^2$$

já que $a\ddot{s} + cs = 0$. Em geral, seja qual for o fenômeno estudado, podemos definir E e suas componentes cinética e potencial como acima.

404: Temos

$$\dot{E} = \tfrac{1}{2}a \cdot 2\dot{x}\ddot{x} + \tfrac{1}{2}c \cdot 2x\dot{x} = \dot{x}(a\ddot{x} + cx) = 0,$$

de modo que E é constante. Calculando-a em $t = -\theta/\omega$, por exemplo, obtemos

$$E = \tfrac{1}{2}a(\dot{x})^2 + \tfrac{1}{2}cx^2 = \tfrac{1}{2}a(0)^2 + \tfrac{1}{2}c(A)^2 = \frac{cA^2}{2},$$

ou seja, a energia é proporcional ao quadrado da amplitude.

405: Resolver a equação $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx = 0$, com $b > 0$, requer conhecer o sinal de $b^2 - 4ac$ para que se determinem as raízes de $P(u) = au^2 + bu + c$. Aqui, suporemos que b é muito pequeno, correspondente a um amortecimento ligeiro. Desse modo, $b^2 - 4ac < 0$ e as raízes de $P(u)$ são complexas com parte real $-b/2a$. A solução geral então é

$$x(t) = Ae^{-bt/2a}\cos(\omega t + \theta), \text{ onde } \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}},$$

ou seja, agora ω depende também de b, mas ainda é constante.

406: Faça o gráfico de $x(t)$ para $t \geqslant 0$, encapsulando-o entre os gráficos de $Ae^{-bt/2a}$ e $-Ae^{-bt/2a}$. Note, agora, que A é a amplitude máxima válida apenas para $t = 0$ (realizada se $\theta = 0$).

407: Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$, não há oscilação e o sistema apenas converge ao equilíbrio ($x = 0$).

408: Novamente se define a energia

$$E = \tfrac{1}{2}a(\dot{x})^2 + \tfrac{1}{2}cx^2.$$

Agora temos

$$\dot{E} = \dot{x}(a\ddot{x} + cx) = \dot{x}(-b\dot{x}) = -b(\dot{x})^2 \leqslant 0,$$

de modo que E é decrescente.

409: Também para o oscilador amortecido convém considerar a quantidade

$$\omega_{\text{nat}} = \sqrt{c/a},$$

chamada *frequência angular natural* do oscilador e obtida desprezando-se o amortecimento.

410: A oscilação é *forçada* quando uma *força excitadora* senoidal com período próprio é aplicada ao oscilador:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0\cos(\omega_0 t),$$

com F_0, ω_0 constantes positivas. (Isso assume que a força excitadora tem valor máximo justamente em $t = 0$; em uma situação prática, basta transladar horizontalmente a solução que obteremos.)

411: Caso se deseje estudar uma força excitadora constante, basta pôr $\omega_0 = 0$, de modo que a solução particular é $x = F_0/c$ constante.

Doravante, assumiremos $\omega_0 > 0$:

412: Defina os seguintes valores:

$$A_0 = \begin{cases} \frac{F_0}{\sqrt{a^2(\omega_0^2-\omega_{\text{nat}}^2)^2+b^2\omega_0^2}} & \text{se } \omega_0 \neq \omega_{\text{nat}}; \\ \frac{F_0}{b\omega_0} & \text{se } \omega_0 = \omega_{\text{nat}}; \end{cases}$$

e

$$\theta_0 = \operatorname{arctg}\Big(\frac{b\omega_0}{a(\omega_0^2 - \omega_{\text{nat}}^2)}\Big) \in \begin{cases}]-\pi, -\frac{\pi}{2}[& \text{se } \omega_0 > \omega_{\text{nat}}; \\ \{-\frac{\pi}{2}\} & \text{se } \omega_0 = \omega_{\text{nat}}; \\ ]-\frac{\pi}{2}, 0[& \text{se } \omega_0 < \omega_{\text{nat}}. \end{cases}$$

Verifique, então, que

$$x_{\text{p}}(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

é uma solução particular dessa equação, conhecida como *solução de estado permanente.*

413: Já a solução $x_{\text{h}}(t) = Ae^{-bt/2a}\cos(\omega t + \theta)$ da parte homogênea é chamada *transiente*, porque seu valor é desprezível após um intervalo de tempo. Assim, a solução completa

$$x(t) = x_{\text{h}}(t) + x_{\text{p}}(t) \approx x_{\text{p}}(t)$$

é inicialmente complicada, mas seu comportamento converge ao de $x_{\text{p}}(t)$; em particular, sua frequência converge à mesma da força excitadora.

414: Quais são as alterações caso $b = 0$, ou seja, o oscilador é forçado, mas não amortecido? Trabalhe com a hipótese $\omega_0 \neq \omega_{\text{nat}}$.

415 Ressonância: Quando $\omega_0 = \omega_{\text{nat}}$, isto é, a frequência da força excitadora é igual à frequência natural do oscilador, diz-se que ocorre *ressonância* e temos, por substituição e simplificação,

$$x_{\text{p}}(t) = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos(\omega_0 t - \tfrac{\pi}{2}).$$

Nesse caso, a amplitude $A_0 = F_0/b\omega_0$ é a máxima possível. A fase do oscilador está atrasada $\pi/2$ em relação a da força excitadora $F_0\cos(\omega_0 t)$; porém,

$$\dot{x}_{\text{p}}(t) = -\frac{F_0}{b}\operatorname{sen}(\omega_0 t - \tfrac{\pi}{2}) = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t),$$

de modo que a velocidade do oscilador está em fase com a força excitadora, ou seja, o movimento nunca se opõe à força, possibilitando a absorção máxima de energia.

416: Finalmente, consideramos a ressonância sem amortecimento, ou seja, $b = 0$ e $\omega_0 = \omega = \omega_{\text{nat}}$: mostre que uma solução particular é

$$x_{\text{p}}(t) = \frac{F_0\omega}{2c} t\operatorname{sen}(\omega t),$$

cujo comportamento leva a amplitudes cada vez maiores. Mostre que a energia desse oscilador é, a partir de certo valor para t, sempre crescente e ilimitada.

Um mecanismo ou estrutura que esteja submetido a um tal oscilador não aguentará estresses crescentes e colapsará. (O mesmo efeito pode ser verificado acima, com b muito pequeno e a solução evolui para uma amplitude A_0 muito alta.)

Já resolvemos a equação de Binet (385) por uma mudança de variáveis que a torna um oscilador harmônico simples. Os seguintes exemplos apresentam diversas outras manifestações dos osciladores harmônicos. Complete os detalhes da formulação, se necessário:

417: Suponha que um bloco de massa m desloca-se sobre um trilho horizontal, atado a uma mola com constante elástica k. Fixe como origem a posição do bloco quando a mola tem seu comprimento natural e assuma que o bloco apenas se desloca em um intervalo pequeno, de modo a sempre valer a lei de Hooke e nunca torcer ou inverter a mola, ou colidir com o ponto fixo da outra extremidade.

Se o bloco mover-se exclusivamente sob ação da força elástica, temos, pela 2ª lei de Newton e porque a força elástica opõe-se ao movimento,

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0,$$

que é um oscilador harmônico simples. A discussão sobre energia, acima, vale literalmente.

Se o movimento do bloco sofrer atrito do trilho, supõe-se que esse atrito seja proporcional à velocidade do bloco, mas oposto: então

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

que é um oscilador harmônico amortecido.

Descreva um sistema massa-mola, como este, mas em que haja força excitadora.

418: Suponha, agora, que o bloco esteja suspenso pela mola e que se mova verticalmente. Assuma que a mola não tenha massa. Sendo g a aceleração gravitacional e supondo que o eixo esteja orientado para cima, temos

$$m\ddot{x} = -kx - mg.$$

Determine a mudança de variável que transforma essa equação em uma de oscilador harmônico simples, sem excitação ou amortecimento.

419 MCU: Suponha que um pino é fixado à borda de um toca-discos ou roda de ceramista e iluminado por uma fonte de luz de raios paralelos. Mostre que o movimento de sua sombra reta em uma parede é um oscilador harmônico simples.

420: Na situação descrita no ponto 31, assuma que a sonda permanece sempre no interior do túnel, ou seja, no interior do planeta. Identifique o oscilador harmônico associado.

Na Seção 2.6, estudamos os circuitos elétricos RC e LR. Podemos completar esse estudo, agora, com os circuitos LC e LCR, que são regidos por osciladores harmônicos. Relembre o funcionamento de capacitores e indutores, respectivamente, em 226 e 231.

421 LC: Ligamos, em série, uma chave interruptora, um indutor de indutância L e um capacitor de capacitância C, ambas L, C constantes positivas. Então, sendo Q a carga armazenada no capacitor e I a corrente no circuito, temos $I = \dot{Q}$ e $L\dot{I} + Q/C = 0$, isto é, a diferença de potencial no indutor neutraliza aquela no capacitor, donde

$$L\ddot{Q} + Q/C = 0.$$

O PVI usual é dado por $Q(0) = Q_0$, carga armazenada inicialmente no capacitor, e $I(0) = 0$, quando a chave é fechada no instante $t = 0$.

Assim, Q é um oscilador harmônico com frequência angular $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e I é sua "velocidade". Como I é senoidal, trata-se de um circuito de corrente alternada: o indutor "facilita tanto" a descarga do capacitor que termina por transferir a carga inteira para a outra folha do capacitor, espelhando a situação inicial; o capacitor carrega-se e descarrega-se, sempre oscilando entre $+Q_0$ e $-Q_0$.

As energias elétrica e magnética do circuito interpretam as energias potencial e cinética que discutimos acima.

422 LCR: Este circuito conecta, também em série, um resistor de resistência R ao circuito LC acima, sendo ainda R constante positiva. Então as quedas de potencial no resistor, no capacitor e no indutor são, respectivamente RI, Q/C e $-L\dot{I}$, donde

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$$

e Q é um oscilador harmônico amortecido com

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \text{ e } \omega_{\text{nat}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e I é sua "velocidade". Trata-se de um circuito de corrente enfraquecendo-se, alternada para valores usuais de R e "contínua" quando R é muito grande.

423: Agora, suponha que se insira nesse circuito, ainda em série, uma fonte de força eletromotriz alternada, isto é, que origina a diferença de potencial $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$. Então $RI + Q/C + L\dot{I} = E$, donde

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = E_0 \cos(\omega_0 t)$$

e Q é um oscilador harmônico amortecido e forçado e, mais uma vez, I é sua "velocidade". (Lembramos que uma força eletromotriz contínua pode ser estudada com $\omega_0 = 0$.)

Finalmente, estudaremos o oscilador harmônico associado ao movimento pendular. Trabalharemos sempre com um pêndulo de haste rígida com comprimento R e toda a sua massa m concentrada pontualmente na extremidade livre; pêndulos reais são conhecidos em [Tip].

Deduziremos a equação do movimento de um pêndulo pela análise das energias envolvidas no processo, sendo desnecessário o estudo de configurações de forças.

424 Pêndulo simples: Aqui, supomos que a haste revolve sem qualquer atrito. Postulamos que o pêndulo move-se em um plano e que pode ficar em repouso em duas posições: a "estável" (em termos práticos) é a do pêndulo pendurado, e a "instável", em que a haste sustenta a massa, é impossível no caso de um pêndulo de fio esticado.

Note: No vocabulário das Seções 2.1 e **??**, esses pontos não são singularidades atratoras ou repulsoras, mas do tipo elíptico: a massa do pêndulo oscila em torno da posição "estável", ou no complemento de um entorno da "instável". O pêndulo não só pode oscilar comumente, como também partir de perto da posição instável e quase dar a volta, em grande amplitude, ou girar sem inverter o sentido de rotação, com velocidade máxima no ponto do equilíbrio estável e mínima no outro.

425: Seja α o ângulo da haste com a vertical (0 na posição estável), considerando-se também alguma orientação para α positivo ou negativo. Então a velocidade angular do pêndulo é $\dot{\alpha}$ e a velocidade linear da massa m é $V = \dot{\alpha}R$. Consideremos as energias cinética $E_{\text{C}} = mV^2/2$ e potencial E_{P} da massa m: se E é a energia mecânica total do sistema, portanto constante, temos $E = E_{\text{C}} + E_{\text{P}}$. (Estas *não* são as energias associadas ao oscilador harmônico como definimos acima.)

426: Adotamos a convenção de que $E_{\text{P}} = 0$ para o ponto mais baixo da trajetória do pêndulo. Verifique, assim, que $E_{\text{P}} = mgR(1 - \cos\alpha)$. As possibilidades que descrevemos ocorrem conforme $E = 0$ (equilíbrio estável), $E = 2mgR$ (equilíbrio instável), $0 < E < 2mgR$ (oscilações) ou $E > 2mgR$ (giros completos).

427: Então

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{\alpha})^2R^2 + mgR(1 - \cos\alpha) = E.$$

Derivando quanto ao tempo e simplificando, obtemos

$$R\ddot{\alpha} + g \operatorname{sen} \alpha = 0.$$

Essa não é uma equação de oscilador harmônico, porque não é linear.

428: Para pequenas amplitudes, $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$, de modo que à equação do pêndulo simples corresponde o oscilador harmônico, ou *equação linearizada,*

$$R\ddot{\alpha} + g\alpha = 0$$

que descreve o fenômeno físico aproximadamente. Sua solução é

$$\alpha(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

com $\omega = \sqrt{g/R}$, ou seja, o período é $T = 2\pi\sqrt{R/g}$, como aprendemos em Física.

Note: Nessa solução, α é um *ângulo* descrito em termos trigonométricos, cujos argumentos é que esperaríamos que fossem ângulos. Se quiser considerar, portanto, a posição vertical ou horizontal da extremidade com massa m, deveremos manipular

$$\cos\alpha = \cos\big(A\cos(\omega t + \theta)\big).$$

Por mais estranho que seja, não há nada errado nisso.

Embora a equação linear seja muito mais simples de resolver e estudar, enquanto sua solução seja uma aproximação muito boa ao que efetivamente ocorre, é importante lembrar que o sistema original não é linear e tem um comportamento muito diferente. Isso é relevante não apenas em Física e nas mais diversas engenharias, mas também em diversos estudos econômicos, demográficos e situacionais, onde a tomada de decisão governamental ou corporativa deve estar atenta a fatores de *caos*.

429: Podemos também considerar a equação original, sem linearização:

$$\dot\alpha = \pm\sqrt{K + \frac{2g}{R}\cos\alpha},$$

onde $K = (2E/mR^2) - (2g/R)$ é constante. Essa é uma equação de 1ª ordem; com qual método podemos resolvê-la?

430 Pêndulo amortecido: No pêndulo simples, a energia total se mantinha constante. Passemos a supor que o pêndulo sofre algum atrito ou amortecimento e que isso implica em uma perda de energia, até o instante t, de $E_\text{A}(t) \geqslant 0$ (sendo $E_\text{A}(0) = 0$). Temos, portanto, $E_\text{C} + E_\text{P} + E_\text{A} = E_0$, onde E_0 é constante igual à energia inicial do sistema.

431: Suponha, por exemplo, que a força resistiva seja proporcional à velocidade da extremidade do pêndulo: $|F| = kV$ com $k > 0$. Então a energia perdida é igual ao trabalho que essa força realiza do instante inicial até o instante considerado, digamos t_1:

$$E_\text{A}(t_1) = \int_\text{trajetória} |F|\,ds = \int_0^{t_1} |F|\cdot\tfrac{ds}{dt}\,dt = \int_0^{t_1} |F|V\,dt = \int_0^{t_1} kV^2\,dt,$$

donde

$$\dot E_A = kV^2 = k(\dot\alpha)^2R^2.$$

Como anteriormente, derivamos $E_\text{C} + E_\text{P} + E_\text{A} = E_0$ e simplificamos para obter

$$R\ddot\alpha + \frac{kR}{m}\dot\alpha + g\,\text{sen}\,\alpha = 0,$$

cuja linearização é o oscilador amortecido

$$R\ddot\alpha + \frac{kR}{m}\dot\alpha + g\alpha = 0.$$

3.7 Coeficientes variáveis

Agora, trataremos das equações lineares em geral, cujos coeficientes podem ser funções da variável independente:

$$p_n(x)y^{(n)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x),$$

em particular as equações de segunda ordem

$$p(x)y'' + q(x)y' + u(x)y = r(x).$$

Novamente, devemos encontrar (i) soluções básicas da parte homogênea e (ii) uma solução específica da equação dada, para depois (iii) obter a solução geral.

Comecemos por determinar a solução particular:

432: O método da variação das constantes de Lagrange (descrito em 353 e seguintes) aplica-se também às equações de coeficientes variáveis, bastando novamente que se conheça uma base de soluções da parte homogênea. A demonstração é idêntica à do caso de coeficientes constantes.

433: Especificamente para uma equação de segunda ordem com a base $\{y_1, y_2\}$ e $W = W(y_1, y_2)$, temos

$$C_1' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r/p & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{y_2 r}{pW} \text{ e } C_2' = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r/p \end{vmatrix} = \frac{y_1 r}{pW},$$

onde agora também p depende de x.

434: Também o método dos coeficientes indeterminados (373) aplica-se ao novo caso, embora os coeficientes da equação devam também ser considerados na proposta de uma forma para a solução particular.

435 Exemplo: $(x^2 + x)y'' - (x^2 - 2)y' - (x + 2)y = x(x + 1)^2$, conhecendo a base $\{e^x, x^{-1}\}$ para a parte homogênea.

Deve-se verificar que realmente $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = x^{-1}$ são soluções de $(x^2+x)y'' - (x^2-2)y' - (x+2)y = 0$, o que podemos fazer por substituição. Também se verifica, usando-se por exemplo o wronskiano, que y_1, y_2 são linearmente independentes. De fato, temos

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & x^{-1} \\ e^x & -x^{-2} \end{vmatrix} = -e^x(x^{-1} + x^{-2}) \neq 0.$$

Cabe uma nota: $p(x) = x^2+x$ anula-se em $x = -1$ e $x = 0$, de modo que devemos estudar a equação separadamente em $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ e $]0, \infty[$. (Isso posto, poderíamos dividir toda a equação por $p(x)$.) Observe que, nesses intervalos, y_1, y_2 estão definidas, de classe C^∞, e W realmente não se anula.

Então, pelo método de Lagrange de variação das constantes, procuramos uma solução particular da equação original tendo a forma $y_p(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)x^{-1}$, para o que devemos ter

$$C_1'(x) = -\frac{x^{-1} \cdot x(x+1)^2}{(x^2+x) \cdot [-e^x(x^{-1} + x^{-2})]} = xe^{-x},$$

donde $C_1(x) = -(x+1)e^{-x}$ (integrando-se por partes), e

$$C_2'(x) = \frac{e^x \cdot x(x+1)^2}{(x^2+x) \cdot [-e^x(x^{-1} + x^{-2})]} = -x^2,$$

donde $C_2(x) = -x^3/3$. (Aqui, ignoramos as constantes de integração.)

Então a solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) &= D_1e^x + D_2x^{-1} + [-(x+1)e^{-x}]e^x + [-x^3/3]x^{-1} = \\ &= D_1e^x + D_2x^{-1} - (1 + x + x^2/3), \end{aligned}$$

onde agora D_1, D_2 são parâmetros arbitrários, mas constantes.

436: Para usar o método dos coeficientes indeterminados, digamos que já suspeitássemos de um polinômio de grau 2 como solução da equação: escrevemos

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

onde a, b, c são constantes a determinar. Como então $y_p'(x) = 2ax + b$ e $y_p''(x) = 2a$, substituindo na equação devemos ter

$$(x^2+x)(2a) - (x^2-2)(2ax+b) - (x+2)(ax^2+bx+c) = x(x+1)^2,$$

ou seja,

$$(-3a)x^3 + (-2b)x^2 + (6a - 2b - c)x + (2b - 2c) = x^3 + 2x^2 + x.$$

Comparando-se esses polinômios, temos $-3a = 1$, $-2b = 2$, $6a - 2b - c = 1$ e $2b - 2c = 0$, de modo que $a = -1/3$, $b = -1$ e $c = -1$, tal qual deduzimos acima.

Para determinar uma base de soluções da parte homogênea da equação linear de coeficientes variáveis, o estudo das raízes do polinômio característico não é válido. É comum que a equação homogênea tenha, de fato, soluções exponenciais e trigonométricas, mas precisamos de outros caminhos para encontrá-las exatamente. Nossa abordagem será via *redução de ordem:*

437 Redução da 2ª ordem: Suponha já conhecida uma solução y_1 de

$$p(x)y'' + q(x)y' + u(x)y = 0:$$

devemos determinar outra solução y_2, linearmente independente de y_1, para formar a base $\{y_1, y_2\}$.

Vimos em 294 que o wronskiano $W = W(y_1, y_2)$ deve satisfazer a equação $pw' + qw = 0$ e, então, ser dado pela solução de Abel–Liouville (299). Explicitamente, temos

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x) = W(x_0) \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{p(s)}\, ds\Big).$$

Expandindo o determinante e substituindo expressões em x para y_1, y_1' e a integral, obtemos uma equação *de primeira ordem* cuja incógnita é y_2. Basta, portanto, resolvê-la segundo os métodos do Capítulo 2.

Para que y_2 seja independente de y_1, devemos ter $W(y_1, y_2) \neq 0$. Para isso, impomos $W(x_0) = 1$ ou outra constante não-nula que simplifique os cálculos, assim como um valor simples para x_0, desde que no domínio correspondente.

438 Exemplo: $(x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0$, conhecendo $y_1(x) = e^x$.

Substituindo, verificamos que y_1 é realmente solução dessa equação.

Note que $p(x) = x + 1$ anula-se em $x = -1$, de modo que devemos estudar a equação separadamente em $]-\infty, -1[$ e $]-1, \infty[$. Trabalhemos primeiro com $]-1, \infty[$:

Fixamos $x_0 = 0 \in \,]-1, \infty[$ e $W(x_0) = 1$, de modo a anular a primitiva abaixo e facilitar os cálculos. A formulação acima torna-se

$$\begin{vmatrix} e^x & y_2(x) \\ e^x & y_2'(x) \end{vmatrix} = 1 \exp\Big(-\int_0^x \frac{-(s+2)}{s+1}\,ds\Big) = \exp\Big(\int_0^x \Big(1 + \frac{1}{s+1}\Big)\,ds\Big).$$

Portanto,

$$e^x y_2' - e^x y_2 = \exp\big(\big[s + \ln|s+1|\big]_0^x\big) = \exp(x + \ln|x+1|),$$

ou seja,

$$y_2' - y_2 = e^{\ln|x+1|} = x + 1$$

já que trabalhamos com $x > -1$. Essa é uma equação de primeira ordem: como aprendemos na Seção 2.3, sua solução é

$$y_2(x) = -(x+2) + Ce^x.$$

Podemos tomar $C = 0$, porque precisamos de uma única expressão para y_2, e obtemos a solução geral

$$y(x) = C_1 e^x + C_2(x+2)$$

da equação dada, onde absorvemos o sinal em C_2.

Para resolver no domínio $]-\infty, -1[$, note (pelo Teorema do Valor Intermediário) que existe $x_0 < -1$ tal que $x_0 + \ln|x_0 + 1| = 0$; não é preciso explicitá-lo para conduzir cálculos como os acima e obter a equação

$$y_2' - y_2 = -x - 1, \text{ com solução } y_2(x) = x + 2 + Ce^x.$$

Novamente, a solução geral é $y(x) = C_1 e^x + C_2(x+2)$.

439 Exemplo: $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$, com $y_1(x) = \exp(-x^2)$.

Verifique que y_1 é solução da equação dada. Desta vez, temos

$$\begin{vmatrix} e^{-x^2} & y_2(x) \\ -2xe^{-x^2} & y_2'(x) \end{vmatrix} = 1 \exp\Big(-\int_0^x \frac{4s}{1}\,ds\Big) = e^{-2x^2},$$

ou seja, $e^{-x^2} y_2' + 2xe^{-x^2} y_2 = e^{-2x^2}$, donde

$$y_2' + 2xy_2 = e^{-x^2}.$$

Uma solução dessa equação, também pela Seção 2.3, é $y_2(x) = xe^{-x^2}$, de modo que a solução geral da equação dada é

$$y(x) = C_1 e^{-x^2} + C_2 x e^{-x^2}.$$

Dada uma solução das partes homogêneas, determine a solução geral destas equações:

440: $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$, $y_1 = e^x$.

441: $xy'' + (x-1)y' - y = 0$, $y_1 = x - 1$.

442: $xy'' + 3y' = 0$, $y_1 = 1$.

443: $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$.

444: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $y_1 = x^2$.

445: $xy'' - y' + 4x^3y = 0$, $y_1 = \operatorname{sen}(x^2)$.

446: $(x^2 + x)y'' - (x^2 - 2)y' - (x+2)y = x(x+1)^2$, $y_1 = e^x$.

447: $x^2y'' + xy' - 4y = 10x^3$, $y_1 = x^2$.

448: $x^2y'' - 2y = -2x$, $y_1 = x^{-1}$.

449: $x^2y'' - xy' + y = x$, $y_1 = x$.

450: Quando a, b, c são constantes reais, sendo $a \neq 0$, e λ é raiz dupla do polinômio $P(t) = at^2 + bt + c$, aprendemos que $e^{\lambda x}$ é solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$ e verificamos que $xe^{\lambda x}$ também é solução. Como poderíamos, inicialmente, encontrar esta solução, conhecendo apenas $e^{\lambda x}$? Mostre os detalhes do cálculo.

Quanto a reduzir uma ordem arbitrária ou maior que 2, temos as seguintes possibilidades:

451: Conhecidas $n-1$ soluções linearmente independentes de uma equação linear homogênea de ordem n, o cálculo do wronskiano e o uso da solução de Abel–Liouville como acima induzem uma equação linear *não*-homogênea de ordem $n-1$ para a n-ésima solução.

452: Suponhamos conhecida uma solução y_1 da equação linear homogênea. Então as substituições $y = y_1 Z$ e $z = Z'$ reduzem a ordem em uma unidade, preservando linearidade *e* homogeneidade.

Solução: Por indução, mostra-se que

$$y^{(i)} = (y_1 Z)^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} y_1^{(j)} Z^{(i-j)}$$

para cada $0 \leqslant i \leqslant n$. Substituindo todos $y^{(0)}, \ldots, y^{(n)}$ na equação original, obtemos uma equação da forma

$$q_n(x)Z^{(n)} + \ldots + q_1(x)Z' + q_0(x)Z = 0.$$

Já que $y = y_1$ é solução da equação original, então $Z = 1$ é solução desta equação, de modo que $q_0(x) = 0$. Logo, pondo $z = Z'$, obtemos

$$q_n(x)z^{(n-1)} + \ldots + q_1(x)z = 0,$$

como desejado.

453: Vejamos isso explicitamente para o próprio caso $n = 2$: com $y = y_1 Z$, temos

$$y' = y_1'Z + y_1Z' \text{ e } y'' = y_1''Z + 2y_1'Z' + y_1Z''.$$

Substituindo-se em $py'' + qy' + uy = 0$, vem

$$p(y_1''Z + 2y_1'Z' + y_1Z'') + q(y_1'Z + y_1Z') + u(y_1Z) = 0,$$

ou seja,

$$[py_1]Z'' + [2py_1' + qy_1]Z' + [py_1'' + qy_1' + uy_1]Z = 0,$$

onde o terceiro coeficiente é nulo porque y_1 é solução da equação original. Assim, com $z = Z'$,

$$[py_1]z' + [2py_1' + qy_1]z = 0,$$

que é uma equação linear homogênea de ordem 1.

454: Resolva os exercícios anteriores utilizando, agora, este método para redução de ordem.

Resta o problema de determinar y_1, isto é, uma primeira solução explícita (e não-nula) da parte homogênea da equação linear:

455: Em alguns casos, isso pode ser feito com o próprio método dos coeficientes indeterminados, aplicado à parte homogênea. (O método de Lagrange produz apenas a solução trivial!) Também se podem tentar outros métodos, como a determinação de série de potências, que estudaremos oportunamente.

3.8 Equações e métodos especiais

Esta seção considera equações de diversas formas. Em particular, para algumas equações lineares homogêneas de coeficientes variáveis, apresenta ao menos uma solução, cumprindo com uma pendência da seção anterior. Ainda, apresentamos outros métodos de resolução que também podem ser aplicados a equações de primeira ordem.

456 Euler: Sejam a, b, c constantes quaisquer, para as quais consideramos a equação linear homogênea

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0.$$

Forme o polinômio $Q(t) = at^2 + (b-a)t + c$ (que *não* se chama "polinômio característico") e mostre que:

(a) x^λ é solução dessa equação se e somente se λ é raiz de Q;

(b) se $(b-a)^2 = 4ac$ e λ é a raiz dupla de Q, então $x^\lambda \ln|x|$ também é solução da equação;

(c) se as raízes de Q são complexas $\alpha \pm \beta i$, com α, β reais, então $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ e $x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$ são soluções dessa equação quando $x > 0$.

457 Exemplo: $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Formamos o polinômio $1t^2 + (-6-1)t + 12 = t^2 - 7t + 12$, cujas raízes são 3 e 4. Assim, as funções linearmente independentes x^3 e x^4 formam uma base para as soluções dessa equação.

Determinar séries de potências por substituição na equação dada é um procedimento similar ao método dos coeficientes indeterminados. Eis o exemplo clássico:

458 Potências: $y'' = -y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Solução: Escrevemos uma série de potências com centro no valor inicial dado: neste caso, $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-0)^n$. Derivamos a série termo a termo, formalmente e sem compromisso com convergência, como se fosse um polinômio gigante: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ e então $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$. Substituímos as séries na equação e reindexamos as séries de modo que todas tenham as potências na mesma forma; como nossa equação envolve apenas y'' e y, re-escrevemos $y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}$. (Caso houvessem coeficientes funções na equação envolvendo x, também desenvolveríamos em séries e multiplicaríamos dentro das somas.) Temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = -\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)a_n + a_{n-2})x^{n-2} = 0.$$

Já que a série obtida é nula, anulamos cada coeficiente seu, formalmente e sem considerar convergência: $n(n-1)a_n + a_{n-2} = 0$ para cada $n \geqslant 2$. Vemos que $a_n = -a_{n-2}/(n(n-1))$, de modo que se n é par então $a_n = (-1)^{n/2}a_0/n!$ e se n é ímpar então $a_n = (-1)^{(n-1)/2}a_1/n!$. Assim,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_0 x^{2k}/(2k)! + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_1 x^{2k+1}/(2k+1)! =$$
$$= a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x,$$

em que rearranjamos a série sem preocupação com convergência. Obtivemos uma família de funções candidatas a solução da equação dada; verificamos que é o que de fato ocorre, e procedemos normalmente para determinar soluções restantes; também podemos estudar o raio de convergência da série obtida na solução. Quanto ao PVI, substituímos os valores iniciais na série obtida e suas derivadas, obtendo $1 = a_0 0^0 + a_1 0$ e $0 = a_0 0 + a_1 0^0$; logo, $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, com $y = \cos x$.

Frequentemente, uma série de potências tem um número finito de coeficientes não-nulos, ou seja, é simplesmente um polinômio. Aqui estão alguns exemplos relacionados a equações diferenciais:

459 Legendre: Verifique que a equação

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, possui uma solução polinomial de grau n chamada *polinômio de Legendre.*

460 Hermite: Mostre que, se $n \in \mathbb{N}$, a equação

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

possui uma solução polinomial de grau n, o *polinômio de Hermite.*

Há dois casos em que se pode reduzir a ordem de uma equação diferencial com a forma propícia. Lembre que a forma geral da equação de segunda ordem é $F(x, y, y', y'') = 0$, para a qual se procuram soluções $y(x)$. É com essas letras que rotulamos os casos abaixo:

461 Ausência de y: Suponha que y não conste na equação: diz-se que "a variável dependente está ausente". Substitua $z = y'$ e $z' = y''$, obtendo a equação $F(x, z, z') = 0$, que é de primeira ordem. A solução procurada y será uma primitiva de z.

462 Ausência de x: Este é o caso de equações "autônomas" que correspondem a "fenômenos independentes de calendário". Se "a variável independente (x) estiver ausente", fazemos $z = y'$ e notamos que

$$y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z.$$

Assim, a nova equação é $F(y, z, z\frac{dz}{dy}) = 0$, onde a variável independente agora é y, de primeira ordem.

Atenção: Não se trata de achar z como função de x. Pelo método proposto, após determinarmos $z(y)$, devemos resolver a equação $y' = z(y)$, ou seja, separar as variáveis assim:

$$\frac{dy}{z(y)} = dx$$

e integrar ambos os lados quanto a x. (Enfim, vemos que há duas equações de primeira ordem a resolver.)

$y = C/\operatorname{tg} x$. **186:** Fator x^{-4}; sol.: $y = \pm\sqrt{x^2 - Cx^3}$. **187:** Fator t^{-3}; sol.: $x = \pm\sqrt{1-2Ct^2}$. **188:** Fator $x^{-4/3}$. **189:** Fator $(3x+1)^{-2/3}$. **190:** Fator $(x+1)^{-2}$; sol.: $y=(x+1)(\ln|x+1|-C)-1$. **193:** Dada g, tome $f(s)=g(1,s)$ e use $a=x^{-1}$; dada f, tome $g(x,y)=f(y/x)$. **194:** Derive $y=xz$ e iguale a $f(z)$. **197:** $y=\pm x\sqrt{2\ln x + C}$. **198:** Analog. a 196, $y = C-2\sqrt{Cx}$ para $0<x<C$ e $y=-C+2\sqrt{-Cx}$ se $-C<x<0$. **203:** $y = 3x/5 - \sqrt{7}\operatorname{tg}(-x\sqrt{35}+C)/5\sqrt{5}$. **204:** Multiplique a equação por y^{-k} e calcule z' em separado. **206:** $y=(C/x^2-2x/3)^{-1/2}$. **207:** $y=[C\exp(x(1-\pi))-2x-2/(1-\pi)]^{1/(\pi-1)}$. **213:** $\dot T = -\alpha(T-A)$. **216:** Linear: por variação da constante, $T(t)=e^{-\alpha t}T_0 + e^{-\alpha t}\int_0^t \alpha e^{\alpha s}A(s)\,ds$. **217:** $T(t)=A+e^{-\alpha t}(T_0-A)$. **220:** A energia térmica do sistema $m_1c_1T_1+m_2c_2T_2$ é constante. **223:** Um oitavo. **225:** Temos $I(x+h)=I(x)-\alpha I(x)h$. Divida por h e tome $h\to 0$: $I'=-\alpha I$. Solução: $I(x)=I_0e^{-\alpha x}$. Assumindo $I(1)=I_0/2$, vem $\alpha=\ln 2$ e $I(3)=I_0/8$. **226:** $Q(t)=Q_0\exp(-t/RC)$ e $I(t)=I_0\exp(-t/RC)$. **227:** $Q(t)=EC(1-\exp(-t/RC))$ e $I(t)=E\exp(-t/RC)/R$. **228:** $Q(t)=EC-(EC-Q_0)\exp(-t/RC)$ e $I(t)=(EC-Q_0)\exp(-t/RC)/RC$. **231:** $I(t)=E(1-\exp(-Rt/L))/R$. **232:** $I_{\text{final}}=E/R$. **262:** O PVI de segunda ordem especifica os valores da solução e de sua derivada em um ponto. Se duas soluções têm o mesmo valor em um ponto, deverão ter derivadas distintas aí. **268:** L.D.: $1(0)+0(5x)+0(-2x^3)=0$. **269:** L.D.: $3(2\operatorname{sen}(x^2-1))+2(-3\operatorname{sen}(x^2-1))=0$. **270:** L.I. **271:** L.D.: $x=\frac{4}{9}(x+5)+\frac{5}{9}(x-4)$. **272:** L.I. **273:** L.I. **274:** L.I. **275:** L.I. **276:** L.I. **277:** L.I. **290:** Suponha L.D.: uma das funções escreve-se como combinação linear das demais. Então também uma coluna da matriz é combinação linear das demais e o determinante anula-se. **324:** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **325:** $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$. **326:** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. **327:** $y=C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen}3x$. **328:** $y=C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\operatorname{sen}x$. **329:** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. **330:** $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$. **331:** $y=C_1e^x\cos 2x + c_2e^x\operatorname{sen}2x$. **332:** $y=C_1e^x\cos\sqrt{3}x + C_2e^x\operatorname{sen}\sqrt{3}x$. **333:** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$. **334:** $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x}$. **335:** Note $P(1)=0$ e fatore. Sol.: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}$. **336:** Note -1 raiz simples: fatore. Sol. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)+C_3e^{x/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x/2)$. **337:** $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$. **338:** $y=C_1e^{\sqrt{3}x}+C_2xe^{\sqrt{3}x}+C_3e^{-\sqrt{3}x}+C_4xe^{-\sqrt{3}x}$. **339:** $y=C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\operatorname{sen}\sqrt{3}x+C_3x\cos\sqrt{3}x+C_4x\operatorname{sen}\sqrt{3}x$. **340:** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3$. **341:** $y=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{2}x}+C_4e^{-\sqrt{2}x}$. **342:** $y=C_1+C_2\cos x+C_3\operatorname{sen}x+C_4x\cos x+C_5x\operatorname{sen}x$. **343:** Mostre $P(t)=(t+1)^n$. Sol. $y=\sum_{j=0}^{n-1}C_{j+1}x^je^{-x}$. **345:** $y=3e^{2x}-2e^{4x}$. **346:** $y=5e^{2x}-10xe^{2x}$. **347:** $y=3\cos 2x$. **348:** $y=0$. **349:** $y=$

$-e^{2x}\cos x$. **350:** $y=e^{x-1}+5xe^{x-1}-4x^2e^{x-1}$. **355:** Dica: forme

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r/a \end{bmatrix}.$$

357: $y=D_1e^x+D_2e^{2x}+e^{-5x}/42$. **358:** $y=D_1e^{2x}+D_2e^{-3x}-(7\operatorname{sen}x+\cos x)/50$. **359:** $y=D_1e^{2x}+D_2e^{-3x}+xe^{2x}$. (A sol. particular pode conter $-e^{2x}/5$; absorva-o em D_1.) **360:** $y=D_1e^{2x}+D_2e^{3x}+2$. **361:** $y=D_1e^{-x}+D_2xe^{-x}+2e^x$. **362:** $y=D_1e^x+D_2xe^x-3\cos x$. **363:** $y=D_1e^{2x}+D_2xe^{2x}+(2x^2+4x+3)/8$. **364:** $y=D_1e^x+D_2e^{-x}+(x^2-x)e^x/4$. **365:** $y=D_1e^x+D_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(3\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$. **366:** $y=D_1\cos 3x+D_2\operatorname{sen}3x+\frac{1}{5}\cos 2x$. **367:** $y=D_1\cos x+D_2\operatorname{sen}x+x\operatorname{sen}x-x^2\cos x$. **368:** $y=D_1e^{2x}+D_2e^{-x}\cos\sqrt{3}x+D_3e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x+xe^{2x}/12$. **369:** $y=D_1e^x+D_2e^{2x}+7\operatorname{sen}x+21\cos x+5e^{-5x}/3$. **370:** $y=D_1e^{2x}+D_2e^{-3x}+20xe^{2x}-14\operatorname{sen}x-2\cos x-50$. (A sol. particular pode conter $-4e^{2x}$; absorva-o em D_1.) **371:** $y=\frac{31}{128}e^{2x}+\frac{97}{128}e^{-2x}+e^{2x}(x^3/12-x^2/16+x/32)$. **372:** $y=(\pi^2/24-\pi/3+8/27)+(7\pi/18+1/270)e^{3x-3\pi/2}-\frac{1}{10}(\cos x+3\operatorname{sen}x)-x^2/6-x/9$. **418:** Dica: Translade x para que a origem seja onde o bloco permanece em equilíbrio, isto é, a mola é esticada apenas pelo peso do bloco. **440:** $y=C_1e^x+C_2(x^2+2x+2)$. **441:** $y=C_1(x-1)+C_2e^{-x}$. (Use $x_0=1$; para integrar $xe^{-x}/(x-1)^2$, faça $e^{-x}/(x-1)+e^{-x}/(x-1)^2$ e integre o 2º termo por partes, cancelando o 1º.) **446:** Confira 435. Para encontrar $y_2=x^{-1}$, a redução de ordem requer: para integrar $(x^2-2)/(x^2+x)$, escreva-a $1-(2/x)+1/(x+1)$; exponencie a primitiva obtendo $e^x(x+1)x^{-2}$; na eq. 1º ordem, integre $e^{-x}(x+1)x^{-2}$ fazendo $\int e^{-x}x^{-2}\,dx$ por partes que já indica toda a primitiva. **447:** $y=C_1x^2+C_2x^{-2}+2x^3$. **448:** $y=C_1x^2+C_2x^{-1}+x$. **449:** $y=C_1x+C_2x\ln x+(\ln x)^2/2$.